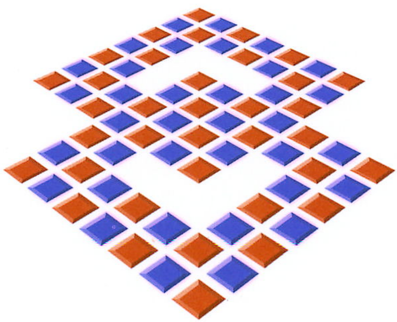
倉田令二朗監修［数学基礎論シリーズ4巻］

逆数学と2階算術

田中一之 著



河合文化教育研究所

倉田令二朗監修［数学基礎論シリーズ４巻］

逆数学と2階算術

田中一之 著

河合文化教育研究所

はじめに

我が国で「数学基礎論」と呼ばれる研究分野は，欧米では普通「ロジック」と呼ばれている．ロジックは数学の基礎の問題と関わりながら発展してきたが，1960年代くらいから大勢は（計算機などへの）応用か（集合論など）純粋理論に２極化され，技術の高度化が進めば進むほど数学の基礎との関係は稀薄になっていった．

そんな中，基礎論の原点に立ち返ろうと「逆数学」の旗を揚げて立ち上がったのが，２人の俊英ロジシャン H. フリードマンと S. シンプソンである．彼らの研究は，２階算術という枠組みの中で数学の各定理を証明するのにどの程度の集合存在公理が必要になるかを調べるもので，ちょうどいい公理を選ぶと定理はその公理と論理的に同値なるという現象（「逆数学現象」）が広く見いだされて，衆目を集めるようになった．最近では，シンプソンの弟子たちの活躍がめざましく，また周辺分野との交流もさかんになって，現代数学基礎論の一つの流れを形成している．

筆者が「逆数学」を初めて知ったのは，大学院の指導教官だったハーリントン教授（カリフォルニア大バークレイ校）のセミナー講演によってであったが，その後彼の級友だったシンプソン教授（ペンシルバニア州大）のところに１年間(1989-1990)滞在して本格的にこの分野を学んだ．本書の内容は，そのときシンプソンと彼の弟子たちから直に教えていただいたものが多いが，私自身この分野で何編かの研究論文を書いているので，単なる受け売りはしていないつもりである．

２階算術について簡単に説明すると，自然数を対象とした理論を１階算術（=「自然数論」）といい，さらに自然数からなる諸集合も対象に加えた理論を２階算術という．２階算術のフル・システム Z_2 がほぼ数学全般の土台になりうることはかなり昔（例．ヒルベルト『幾何学基礎論』1899年）から知られていたので，この体系の無矛盾性を証明することが数学基礎論の最重要課題の一つであるが，未だ完全な解決にいたらず専門家の論議が続いている．

そこで，すでに無矛盾性が証明されている２階算術の部分体系でどれだけの数学

が展開できるかというのが自然な疑問だが，それをさらに発展させ，個々の定理に対しその証明に必要十分な2階算術の公理系が何かをシステマティックに調べようというのが「逆数学」である．

「逆数学」は，直接数学の基礎付けを目標としたものではないが，数学の基礎を考え直すために参考になるであろう興味深い結果がいろいろ得られている．例えば，解析学の歴史では，コーシーが中間値の定理を証明(?)したのは実数の公理（例．ワイエルシュトラスの上限に関する公理）が発見される前であった．そこで，「逆数学」の結果を見ると，後者の方が前者より強い集合存在公理を必要とすることがわかる．つまり，これは数学史の流れがより高度な集合論を求める方向に進んだと解釈できるだろう．また，逆数学による定理の分類は，代数，幾何といった分野を超えて，定理の難易度もしくは抽象度といった素朴な感覚を反映していると思われる．

本書の構成について簡単に述べておく．第1章では，本書を読むのに必要な数理論理学の知識を復習する．予備知識はとくに仮定していないが，完全性定理や不完全性定理にここで初めて出会うという方は，他の詳しい入門書も併読していただきたい．第2章は，「逆数学」の入門から中級コースである．しかし，これがしっかりマスターできれば，この分野の最先端の論文を読む実力がつくことを保証する．第3章は，2階算術の諸体系の関係をまとめたものであるが，結果そのものよりむしろ証明法が重要である．ここで用いられる再帰的飽和モデルや強制法は，現代ロジックの必須テクニックであり，この章はそれらを本格的に学ぶ前の準備訓練として役立つであろう．そして，付録は，歴史的な背景を知っていただくための軽い読みものである．

さて，本書を著すきっかけを与えてくれたのは，河合文化教育研究所の倉田令二朗先生である．倉田先生は，1993年秋に私が名古屋大学で行った集中講義に全回出席して下さり，最終講義のあとその内容を本にまとめたらよいというアドバイスを下さった．そして，翌年，河合ブックレットから基礎論シリーズの刊行が決まると

同時にその中の1冊に入れたいとお誘いいただいた.

すでに私はいくつかの学会誌や雑誌等にこの分野の解説記事を書いていたので, 気楽にお引き受けしたが, いざ書き下ろし始めると必要事項・基本用語の確認だけで大変な作業になった. ゲーデル以前の基礎論を解説した教科書は多いが, それ以降の発展を扱ったものは極めて少ないからである. この要求により, 拙編著『数学基礎論講義』(日本評論社) が副産物として生まれた. 本書を読むためにそちらの知識が必要になるわけではないが,「逆数学」の研究の位置づけを正しく理解していただくためには是非合わせ読んでいただきたいと思う. なお, 本書の用語 (例えば, “recursive”=“再帰的”, “inductive”=“帰納的”) は, そちらの書に従っている.

本書は, 東北大, 東大, 名大などで筆者が行った講義の原稿がもとになっている. それらの講義の機会を与えてくださった先生方と熱心に (一部は眠そうに) 聴講してくれた学生諸君に感謝する. また, シンプソン先生や諸先輩方の温かいご指導がなければ, この本は決して書けなかっただろう. お一人お一人のお名前をあげることはできないが, 皆様に心から感謝している. 最後に, 出版に際しては, 倉田先生をはじめ, 名古屋大学の篠田寿一先生と河合文化教育研究所の鄭芸郷さんに大変お世話になった. この場をかりて御礼申し上げたい.

平成9年6月　仙台にて

著者しるす

目　　次

逆数学と2階算術

田 中 一 之

第1章　数理論理学の基礎知識

1.1　数学的準備

最初に，本書で用いる数学上の基本概念を整理しておこう．現代数学の殆どの概念は集合の言葉で定義されており，それは本書でも同様である．従って，集合に関する基本事項の復習から始めよう．

集合 A が要素 x をもつとき，$x \in A$ と記す．集合 A のすべての要素が集合 B にも属するとき，A は B の**部分集合**であるといい，$A \subset B$ または $A \subseteq B$ と書く．とくに，**空集合** $\emptyset$ はどんな集合の部分集合でもある．$A \subset B$ かつ $B \subset A$ のとき，2つの集合 A, B は相等しいといい，$A = B$ と書く．$A \subset B$ だが $A \neq B$ のとき，A は B の**真部分集合**であるという．

集合 $A = \{x : P(x)\}$，$B = \{x : Q(x)\}$ が与えられたとき，それらから第3の集合を作る操作として，**和集合** $A \cup B = \{x : P(x)$ または $Q(x)\}$，**交わり** $A \cap B = \{x : P(x)$ かつ $Q(x)\}$，**差集合** $A - B = \{x : P(x)$ だが，$Q(x)$ でない$\}$ がある．全体集合 U が定まっているとき，$U - A$ を単に $\bar{A}$ と書いて，A の**補集合**という．すると，次のド・モルガンの法則が成り立つ：

$$\overline{(A \cap B)} = \bar{A} \cup \bar{B}, \qquad \overline{(A \cup B)} = \bar{A} \cap \bar{B}.$$

以上が大体高校数学（新課程「数学Ｉ」）の内容であり，これからが大学数学の話である．集合 A が与えられたとき，その部分集合全体からなる集合 $\{X : X \subset A\}$ を A の**ベキ集合** (**power set**) と呼んで，$P(A)$ または 2^A で表す．例えば，$A = \{a, b, c\}$ のとき，$P(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{c, a\}, \{a, b, c\}\}$ である．一般に，A が n 個の要素からなるとき，$P(A)$ は 2^n 個の要素をもつ．

n 個の集合 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ が与えられたとき，それらから1つずつ要素 $a_i \in A_i$

を取り出して並べたもの $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ を n-**組** (n-**tuple**) といい，n-組全部の集まりを $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ で表す．このとき，どれかの A_i が空集合なら，$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ も空である．$A_1 = \cdots = A_n = A$ のとき，$A_1 \times \cdots \times A_n$ を A^n と書く．特に，A^1 は A と同一視する．A^0 は空な組(　)だけを要素とする集合{(　)}である．

A^n の部分集合 R は A 上の n **項関係** (**relation**) と呼ばれる．そして，$(x_1, \ldots, x_n) \in R$ を $R(x_1, \ldots, x_n)$ と表したり，特に R が 2 項関係のときは $x_1 R x_2$ と書くこともある．

集合 X の各要素に集合 Y の要素を対応させる**関数**を $f: X \to Y$ で表す．そして，X を f の**定義域** dom(f)，$f(X) = \{f(x) : x \in X\}$ を f の**値域** range(f) という．関数 $f: X \to Y$ に対して，$X \times Y$ の部分集合 $\{(x, f(x)) : x \in X\}$ を f の**グラフ** (**graph**) という．逆に，$X \times Y$ の部分集合 F が与えられ，各 $x \in X$ に対し $(x, y) \in F$ となる y がちょうど 1 つ定まるなら，F をグラフとする関数が唯一つ存在する．

全体集合 U を固定する．集合 $A \subset U$ に対して，

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \text{ のとき} \\ 0, & x \notin A \text{ のとき} \end{cases}$$

で定義される関数 $\chi_A : U \to \{0, 1\}$ を A の**特性関数** (**characteristic function**) という．逆に，$f : U \to \{0, 1\}$ が与えられたとき，f を特性関数とするような集合が唯一つ定まる．

2 つの集合 A, B の各要素の間に 1 対 1 対応があれば，A と B は同じ**濃度** (**cardinality**) をもつという．ある自然数 n が存在し，集合 A と集合 $\{0, 1, \cdots, n-1\}$ が同じ濃度をもつとき，A は**有限集合**であるといい，またその濃度は n であるという．有限でない集合を**無限集合**と呼ぶ．集合 A が自然数全体 N と同じ濃度をもつとき，A の濃度は $\aleph_0$ (**アレフ・ゼロ**) であるという．有限集合と濃度 $\aleph_0$ の集合を合わせて (**高々**) **可算集合**と呼び，それ以外を**非可算集合**と呼ぶ．

非可算集合の例として，N のベキ集合 $P(\mathrm{N})$ について考えよう．いま，$P(\mathrm{N})$ と N が1対1に対応していると仮定して矛盾を導く．まず，$n \in \mathrm{N}$ に対応する N の部分集合を A_n と書く．そして，$B = \{n : n \notin A_n\}$ とおく．B は N の部分集合だから，ある $m \in \mathrm{N}$ が存在して，$A_m = B$ となるはずである．このとき，m は B の要素になるだろうか？　$m \in B$ とすると，m は B の内包条件を満たすはずだから，$m \notin A_m$，つまり $m \notin B$ となって矛盾．逆に，$m \in B$ でないとすると，すなわち $m \notin A_m$ だから，m は B に属することになり，やはり矛盾．従って，$P(\mathrm{N})$ と N が同じ濃度をもつという仮定が否定された．このような証明法を**対角線論法** (**diagonal argument**) と呼ぶ．

集合や関数を定義する便利な方法に，**再帰法** (**recursion**)(注1)がある．例えば，非負偶数全体の集合 E は次のように再帰的に定義できる：

（1）　$0 \in E$

（2）　$n \in E$ ならば $n+2 \in E$

（3）　（1），（2）から有限ステップで得られるものだけが E に属する．

つまり，E は 0 を含み(条件1)，+2の演算で閉じた(条件2)，最小の集合である(条件3)．再帰的定義であることが明白な場合，（3）の文言は省略することが多い．

再帰的に定義されたものに関して，それが何らかの性質をもつことを示す際に用いられる有力な手段が**帰納法** (**induction**) である．なかでも，自然数に関する性質を証明する際に用いられる帰納法は，**数学的帰納法**と呼ばれる．上で非負偶数の集合 E を再帰的に定義したが，その定義の+2を+1に置き換えたものが，自然数全体の集合 N の定義に他ならない．すべての自然数 n が性質 $P(n)$ を満たすことを証明する場合，数学的帰納法では

（1）　$P(0)$ が成り立つ

（2）　$P(n)$ が成り立てば，$P(n+1)$ が成り立つ

を示す．性質 P を満たす自然数の集合 $A = \{n \in \mathrm{N} : P(n)\}$ を考えると，これは 0 を含み，+1に関して閉じているから，N の最小性（条件3）より，A と N は一致

する．つまり，すべての自然数 n が性質 $P(n)$ を満たすことになる．

注 1．これは「帰納的定義」と呼ばれることも多いが，本書では証明手段としての「帰納法」との区別を明確にするために「再帰法」と呼ぶ．

1.2　述語論理と完全性定理

述語論理における文（命題）は数学的構造についての記述である．文の集合を**理論**もしくは**公理系**といい，理論 T のすべての文を成り立たせる構造を T の**モデル**と呼ぶ．例えば，群の公理（演算の結合律，単位元の存在，逆元の存在）を満たす数学的構造，つまり群は，群論のモデルである．では，ある理論が与えられたとき，そのすべてのモデルに共通して成り立つ命題はどのようなものだろうか？　例えば，群の各公理がどの群にも共通して成り立っていることは明らかだが，それ以外には何があるだろうか？　この問いに完全な答えを与えたのが，ゲーデルの完全性定理（定理 1.1）である．

定義 1.1　述語論理の**言語** L は，関数記号 f_i と関係記号 R_j のリストである：

$$L=(f_0,f_1,\ldots;R_0,R_1,\ldots).$$

f_i を m_i 変数の関数記号，R_j を n_j 項の関係記号とするとき，$\rho=(m_0,m_1,\ldots;n_0,n_1,\ldots)$ を言語 L の**類型**（**similarity type**）という．

定義 1.2　言語 L における**構造**（簡単に L-**構造**または ρ-**構造**）$\mathfrak{A}$ は，次のものからなる：

（1）　空でない集合 $A=|\mathfrak{A}|$．これを構造 $\mathfrak{A}$ の**領域**（または**宇宙**）と呼ぶ．

（2）　各 m 変数関数記号 $f\in L$ に対して，A 上の関数 $f^{\mathfrak{A}}:A^m\to A$.

（3）　各 n 項関係記号 $R\in L$ に対して，A 上の関係 $R^{\mathfrak{A}}\subseteq A^n$.

普通，構造を $\mathfrak{A}=(A;f_0^{\mathfrak{A}},f_1^{\mathfrak{A}},\ldots;R_0^{\mathfrak{A}},R_1^{\mathfrak{A}},\ldots)$ と表し，誤読が生じない場合には，仕切り記号としてセミコロン；の代わりにコンマ，を用いる．

変数記号 $x_0,x_1,x_2,\ldots$ と言語 L の関数記号を適当に合成して出来る記号列を L

の**項**（term）という．とくに，L の**定数記号**（０変数関数）は項である．項 t に含まれるいくつかの変数記号（例えば x,y）に注目して，$t(x,y)$ のように記すことがある．そして，項 $t(x)$ に現れる変数記号 x をすべて項 s に置き換えてできる項を $t(s)$ のように表す．また，慣習に従って，２変数関数 $f(x,y)$ は xfy のようにも表す．例えば，$+(x,y)$ を $x+y$ と書く．

定義 1.3　言語 L の**論理式**（**formula**）を次のように定義する．

（１）　次の２つの形の記号列を（原子）論理式と呼ぶ：

$$s=t, \qquad R(t_0, t_1, \ldots, t_{n-1}).$$

ここで，s,t 及び $t_0,t_1,\ldots,t_{n-1}$ は L の項，R は L の n 項関係記号である．

（２）　φ と ψ を言語 L の論理式，x を変数記号として，$\neg(\varphi)$, $(\varphi)\wedge(\psi)$, $(\varphi)\vee(\psi)$, $(\varphi)\rightarrow(\psi)$, $\forall x(\varphi)$, $\exists x(\varphi)$ は言語 L の論理式である．（カッコは適当に省略してよい.）

論理式 φ に含まれるすべての変数がそのなかで束縛されているとき，φ を**文**（**sentence**）または**命題**と呼ぶ．構造 $\mathfrak{A}$ における文の“真偽”を決めるために，$\mathfrak{A}$ の拡大構造 $\mathfrak{A}_A$ を定義する．まず，A の各要素 a に対応する新しい定数記号 c_a を L に付け加えてできる言語を L_A とする．そして，定数記号 c_a の解釈を a と定めることによって，L-構造 $\mathfrak{A}$ を L_A-構造に拡大したものが $\mathfrak{A}_A$ である．表記の簡単化のため，以下では c_a を単に a で表す．

定義 1.4　構造 $\mathfrak{A}_A$ で真となる文全体 $Th(\mathfrak{A}_A)$ を次のように定義する：

- 原子文 $\varphi\in Th(\mathfrak{A}_A) \Leftrightarrow \mathfrak{A}_A$ で定められた記号解釈のもとで，φ が成り立つ
- $\neg\varphi\in Th(\mathfrak{A}_A) \Leftrightarrow \varphi\notin Th(\mathfrak{A}_A)$
- $\varphi\wedge\psi\in Th(\mathfrak{A}_A) \Leftrightarrow \varphi\in Th(\mathfrak{A}_A)$ かつ $\psi\in Th(\mathfrak{A}_A)$
- $\varphi\vee\psi\in Th(\mathfrak{A}_A) \Leftrightarrow \varphi\in Th(\mathfrak{A}_A)$ または $\psi\in Th(\mathfrak{A}_A)$
- $\varphi\rightarrow\psi\in Th(\mathfrak{A}_A) \Leftrightarrow \varphi\in Th(\mathfrak{A}_A)$ でないか $\psi\in Th(\mathfrak{A}_A)$
- $\forall x\varphi(x)\in Th(\mathfrak{A}_A) \Leftrightarrow$ すべての定数 a について，$\varphi(a)\in Th(\mathfrak{A}_A)$

• $\exists x\varphi(x) \in Th(\mathfrak{A}_A) \Leftrightarrow$ ある定数 a が存在し，$\varphi(a) \in Th(\mathfrak{A}_A)$

上の条件は**タルスキの真理条項**と呼ばれる．また，$Th(\mathfrak{A}_A)$ は構造 $\mathfrak{A}$ の**初等ダイヤグラム** (elementary diagram) と呼ばれる．

定義 1.5 L の文 φ が $Th(\mathfrak{A}_A)$ に属するとき，φ は構造 $\mathfrak{A}$ で**真**であるといい，$\mathfrak{A} \vDash \varphi$ と書く．自由変数 $x_0, \ldots, x_{n-1}$ を含む一般の論理式 φ に対しては，$\forall x_0 \cdots \forall x_{n-1}\varphi$ が構造 $\mathfrak{A}$ で真であるときに φ は**真**であるといい，$\mathfrak{A} \vDash \varphi$ と書く．

定義 1.6 言語 L の文の集合 T が $Th(\mathfrak{A}_A)$ の部分集合になるとき，構造 $\mathfrak{A}$ は理論 T の**モデル** (model) であるといい，$\mathfrak{A} \vDash T$ と書く．

定義 1.7 T を言語 L の文の集合とし，φ を L の論理式とする．T の任意のモデル $\mathfrak{A}$ において，$\mathfrak{A} \vDash \varphi$ となるとき，φ は T の**帰結** (consequence) であるといい，$T \vDash \varphi$ と書く．

ゲーデルの完全性定理は，$T \vDash \varphi$ の関係がこれから述べる述語論理の演繹体系における証明可能性として捉えられることを主張するものである．

定義 1.8 文の集合 T が与えられたとき，次の条件を満たす L の論理式の列 $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n$ を T における φ_n の**証明**という：各 $k \leq n$ について，

(1) φ_k は T に属するか，

(2) φ_k は次の公理のどれかか，

P1. $\varphi \to (\psi \to \varphi)$

P2. $(\varphi \to (\psi \to \theta)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \theta))$

P3. $(\neg\psi \to \neg\varphi)) \to (\varphi \to \psi)$

P4. $\forall x\varphi(x) \to \varphi(t)$

P5. $x = x$

P6. $x = y \to (\varphi(x) \to \varphi(y))$

(3) $i, j < k$ が存在して $\varphi_j = \varphi_i \to \varphi_k$ となるか，

(4) $i < k$ が存在して $\varphi_i = \psi \to \theta(x)$ かつ $\varphi_k = \psi \to \forall x\theta(x)$，但し x は ψ に現れない．

T において φ の証明が存在するとき，$T\vdash\varphi$ と書く．また T が空のときは，単に $\vdash\varphi$ と書く．

論理記号 $\wedge, \vee, \exists$ が上の公理系に含まれないわけは，それらは $\neg, \rightarrow, \forall$ によって定義できるからである．実際，$\phi\wedge\psi$ を $\neg(\phi\rightarrow\neg\psi)$ に，$\phi\vee\psi$ を $\neg\phi\rightarrow\psi$ に，$\exists x\phi$ を $\neg\forall x\neg\phi$ に読み換えることで，$\wedge, \vee, \exists$ に関することは$\neg, \rightarrow, \forall$ に関する法則だけから導ける．例えば，$(\phi\wedge\psi)\rightarrow(\phi\vee\psi)$ が成り立つかどうかは，$(\neg(\phi\rightarrow\neg\psi))\rightarrow(\neg\phi\rightarrow\psi)$ が成り立つかどうかを見ればよい．

以上の準備のもとで，完全性定理は次のように述べられる．

定理 1.1（ゲーデルの完全性定理）　$T\vdash\varphi\Leftrightarrow T\vDash\varphi$.

証明の概略　“$T\vdash\varphi$ ならば $T\vDash\varphi$” は簡単にわかる．実際，述語論理の公理と T の文は T の任意のモデルで真になるし，“証明される式が真である” という性質は推論規則 (3), (4) によって保存されるのは明らかだからである．

逆を示すために，$T\vdash\varphi$ でないと仮定する．すると，$T\cup\{\neg\varphi\}$ は無矛盾であり，これがモデルを持つことさえ証明すれば，$T\vDash\varphi$ でないことになって，完全性定理が証明される．まず，新しい定数記号（**ヘンキンの定数**と呼ばれる）の集合 C を用意し，言語 $L'=L\cup C$ の文の無矛盾な集合 S で，$T\cup\{\neg\varphi\}\subset S$ かつ次の条件を満たすものを見つける：

（1）　言語 L' における任意の文 φ に対して，$\varphi\in S$ または $\neg\varphi\in S$.

（2）　文 $\exists x\varphi(x)$ が S に属するとき，定数 $c\in C$ が存在して $\varphi(c)\in S$.

このような S が見つかったとしよう．集合 C 上に次のように同値関係$\sim$を定義する：

$$c\sim d \quad\Leftrightarrow\quad (c=d)\in S.$$

そして，C の同値類 $[c]=\{d : d\sim c\}$ の集まりを A とし，L の関数記号 f と関係記号 R の解釈をそれぞれ次のように定めることで，L-構造 $\mathfrak{A}$ を定義する：

$$f^{\mathfrak{A}}([c_0],[c_1],\cdots,[c_{m-1}])=[d] \quad\Leftrightarrow\quad (f(c_0,c_1,\ldots,c_{m-1})=d)\in S,$$

$$R^{\mathfrak{A}}([c_0], [c_1], \cdots, [c_{n-1}]) \quad \Leftrightarrow \quad R(c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}) \in S.$$

すると，任意の論理式 $\varphi(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1})$ に対して，

$$\varphi([c_0], [c_1], \cdots, [c_{n-1}]) \in Th(\mathfrak{A}_A) \quad \Leftrightarrow \quad \varphi(c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}) \in S$$

となることが，簡単な帰納法で証明できる．いま $T \cup \{\neg\varphi\} \subset S$ であるから，$T \cup \{\neg\varphi\} \subset Th(\mathfrak{A}_A)$ である．従って，構造 $\mathfrak{A}$ は $T \cup \{\neg\varphi\}$ のモデルになる．

以下，S の作り方を示す．まず，$S_0 = T \cup \{\neg\varphi\}$ とおく．L のすべての文を並べて，$\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n, \ldots$ とする．無矛盾な集合の無限増加列 $S_0^0 \subset S_0^1 \subset S_0^2 \subset \cdots$ を次のように作る．$S_0^0 = S_0$ とおく．任意の $n \geq 0$ に対して，$S_0^n \cup \{\varphi_n\}$ が無矛盾なら，$S_0^{n+1} = S_0^n \cup \{\varphi_n\}$ とおき，そうでないときは $S_0^{n+1} = S_0^n$ とおく．そして，$S_1 = \cup S_0^n$ とおけば，S_1 は言語 $L' = L$ に対して条件(1)を満たす．

次に，S_1 に含まれるすべての $\exists x\varphi(x)$ の形の式に対しそれぞれ新しい定数 c_φ を用意し，それらを集めて C_1 とする．そして，S_1 に $\varphi(c_\varphi)$ をすべて加えたものが S_2 である．S_2 は条件(2)を成り立たせるが，言語が拡大したため条件(1)を満たさない．

そこで，この S_2 に対し，言語 $L \cup C_1$ における極大無矛盾集合 S_3 を上の S_1 と同様に作る．次に，S_3 に含まれるすべての $\exists x\varphi(x)$ に対しそれぞれ新しい定数 c_φ を用意し，その定数の集合を C_3 とし，また S_3 に $\varphi(c_\varphi)$ をすべて加えたものを S_4 とする．以下同様に繰り返して，最後に，$S = \bigcup S_n$，$C = \bigcup C_{2n+1}$ とおく．これが 2 つの条件を同時に満たしていることは明らかである．以上で完全性定理の証明が完了した． □

この定理により，例えば，群全体に共通して成り立つ命題の集合は，群の公理から述語論理の公理と推論規則によって導かれる定理の集合と一致することがわかる．この意味で述語論理の体系は完璧であると主張しているのが，完全性定理である．

上の証明から，直ちに次のことがいえる．

定理 1.2（レーベンハイム＝スコーレムの定理） 可算言語 L における無矛盾な理論は，高々可算なモデルをもつ．

証明 完全性定理の証明において，新しい定数記号の集合 C は可算無限である．これから同値類をとって $\mathfrak{A}$ を作っても，やはり $|\mathfrak{A}|$ は高々可算な集合である． □

定理 1.3（コンパクト性定理） 理論 T がモデルをもつための必要十分条件は，T の任意の有限部分集合がモデルを持つことである．

証明 必要性は明らかなので，十分性を示す．T の任意の有限部分集合がモデルをもてば，任意の有限部分集合は無矛盾である．もし，T から矛盾が導かれた場合，その証明には有限個の論理式しか用いられていないはずだから，T のある有限部分集合からも無矛盾がでる．従って，任意の有限部分集合が無矛盾なら T も無矛盾であり，完全性定理（の証明）により T はモデルをもつ． □

定義 1.9 T, T' をそれぞれ言語 L, L' における理論とし，$L \subset L'$ とする．このとき，L の任意の文 σ に対して，

$$T \vdash \sigma \quad \Leftrightarrow \quad T' \vdash \sigma$$

が成り立つならば，T' は T の**保存的拡大**（**conservative extention**）であるという．

定理 1.4 $\varphi(x_0, \ldots, x_{n-1}, y)$ を言語 L における論理式で，$x_0, \ldots, x_{n-1}, y$ 以外の自由変数を持たないものとする．このとき，$T \vdash \forall x_0 \cdots \forall x_{n-1} \exists y \varphi(x_0, \ldots, x_{n-1}, y)$ ならば，新しい n 変数関数記号 f を用いた拡大理論 $T' = T \cup \{ \forall x_0 \cdots \forall x_{n-1} \varphi(x_0, \ldots, x_{n-1}, f(x_0, \ldots, x_{n-1})) \}$ は T の保存的拡大である．

証明 $\mathfrak{A}$ を T の任意のモデルとする．$T \vdash \forall x_0 \cdots \forall x_{n-1} \exists y\ \varphi(x_0, \ldots, x_{n-1}, y)$ ならば，$\forall x_0 \cdots \forall x_{n-1}\ \varphi(x_0, \ldots, x_{n-1}, f(x_0, \ldots, x_{n-1}))$ を成り立たせる関数 $f^{\mathfrak{A}}$ が作れる（選択公理を使用）．それを $\mathfrak{A}$ に加えた構造 $\mathfrak{A}^* = \mathfrak{A} \cup \{f^{\mathfrak{A}}\}$ は，明らかに T' のモデルである．言語 L における T' の定理 σ は $\mathfrak{A}^*$ において真となるが，その真偽は f の解釈と無関係だから，$\mathfrak{A}$ でも真となるはずである．最後に，$\mathfrak{A}$ は T

の任意のモデルだから，完全性定理により $T \vdash \sigma$ がいえる． □

系 1.5 $T \vdash \exists x \varphi(x)$ ならば，新しい定数 c を用いて拡大した理論 $T' = T \cup \{\varphi(c)\}$ は T の保存的拡大である．

この定理と系の簡単な応用として，群の理論について考えてみよう．2変数関数 $*$ だけからなる言語を L とし，さらに1変数関数 $^{-1}$ と定数 e を加えて拡大した言語を L' とする．まず，L' における群の理論 T' は，

$$(x * y) * z = x * (y * z), \quad x * e = x, \quad x * x^{-1} = e$$

である．これから e と $^{-1}$ を消去して，L における群の理論 T は，

$$(x * y) * z = x * (y * z), \quad \exists w \forall x (x * w = x \wedge \exists y\, x * y = w)$$

と書ける．このとき，T' が T の保存的拡大であることが上の定理よりわかる．多くの場合は T' の方が扱いやすい公理系だが，T は言語が簡単であるというメリットがあり，状況によってどちらを選択しても本質は変わらないというのが定理1.4 及び系 1.5 の主張である．

最後に，述語論理の自然な拡張である**多領域論理** (**many sorted logic**) について述べておこう．数学の理論では，2種類以上の異なった対象を同時に扱うことがよくある．例えば，ベクトル空間ならスカラーとベクトル，ユークリッド幾何なら点と線と面，などである．このような場合，構造 $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\cdots$ の個別の性質と，複数の構造にまたがる性質を同時に議論する必要がある．

この状況は一見複雑に見えるが，容易に普通の述語論理の枠組みに納めることができる．すなわち，全体領域として $U = A \cup B \cup C \cup \cdots$ を取り，各領域 $A, B, C, \cdots$ をそれぞれ1変数述語で表現すればよい．ユークリッド幾何を普通の1階述語論理で議論するなら，“x は点である”，“x は線である”，“x は面である” という意味の関係記号をそれぞれ $P(x)$, $L(x)$, $F(x)$ とし，例えば，“すべての点 x について，$\cdots$” は $\forall x (P(x) \to \cdots)$ で表せばよい．

しかし，表記の簡便さのために，異なる種類の対象には，異なる変数記号を用い，

それらは対応する領域だけを動くものと約束することが多い．ユークリッド幾何の場合，点の変数は小文字，線は大文字，面はギリシャ文字などとする．また，次章以降で扱う2階算術は，自然数と自然数の集合という2種類の対象をもつ（2領域の）述語論理の体系であり，自然数の変数には小文字，集合の変数には大文字を使うことで，それぞれの変域を区別している．さらに付言すると，例えば，関数を（そのグラフによって）集合として定義した場合，関数の上だけを動く集合変数fがあるような書き方を便宜的に行う．このとき，$\forall f \ldots$ は $\forall f$（fは関数である $\rightarrow \ldots$）のことである．集合変数に小文字fを使うのは約束違反だが，統一性より直観を大切にしたい．

1.3　再帰理論と不完全性定理

計算機を使ってインプットとアウトプットの関係として実現できる関数を**計算可能な関数**という．ここでは，自然数（の組）から自然数への関数（いわゆる数論的関数）のうちで計算可能なものとして，再帰的関数を考える．

定義 1.10　再帰的関数（**recursive function**）は以下のように定義される：

（1）　**ゼロ関数** $\mathrm{Z}() = 0$，**後者関数** $\mathrm{S}(x) = x+1$，**射影関数** $\mathrm{P}^n_i(x_1, \ldots, x_n) = x_i$（$1 \leq i \leq n$）は再帰的関数である．（注：ゼロ関数は0変数の関数，つまり定数0である．）

(2a)　**関数合成．** $g_i : \mathrm{N}^n \rightarrow \mathrm{N}, h : \mathrm{N}^m \rightarrow \mathrm{N}$（$1 \leq i \leq m$）が再帰的関数のとき，

$$f(x_1, \ldots, x_n) = h(g_1(x_1, \ldots, x_n), \cdots, g_m(x_1, \ldots, x_n))$$

で定義される合成関数 $f = h(g_1, \ldots, g_m) : \mathrm{N}^n \rightarrow \mathrm{N}$ は再帰的関数である．

(2b)　**原始再帰法．** $g : \mathrm{N}^n \rightarrow \mathrm{N}, h : \mathrm{N}^{n+2} \rightarrow \mathrm{N}$ が再帰的関数のとき，

$$\begin{aligned} f(x_1, \ldots, x_n, 0) &= g(x_1, \ldots, x_n) \\ f(x_1, \ldots, x_n, y+1) &= h(x_1, \ldots, x_n, y, f(x_1, \ldots, x_n, y)) \end{aligned}$$

で定義される関数$f : \mathrm{N}^{n+1} \rightarrow \mathrm{N}$ は再帰的関数である．

(2c)　**最小化.** $g : \mathbf{N}^{n+1} \to \mathbf{N}$ は再帰的関数で，$\forall x_1 \cdots \forall x_n \exists y\, g(x_1, \ldots, x_n, y) = 0$ を満たすとする．このとき，$g(x_1, \ldots, x_n, y) = 0$ となる最小の y を $\mu y(g(x_1, \ldots, x_n, y) = 0)$ で表し，

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \mu y(g(x_1, \ldots, x_n, y) = 0)$$

で定義される関数 $f : \mathbf{N}^n \to \mathbf{N}$ は再帰的関数である．

(2c) を用いずに定義される再帰的関数をとくに**原始再帰的関数**（**primitive recursive function**）という．特性関数 $\chi_R : \mathbf{N}^n \to \{0, 1\}$ が再帰的／原始再帰的関数になるとき，n 項関係 $R \subset \mathbf{N}^n$ は再帰的／原始再帰的であるいう．比較的簡単に示せる事実として，再帰的／原始再帰的な n 項関係 A, B に対し，

$$\neg A,\ A \wedge B,\ A \vee B,\ \forall y < zA,\ \exists y < zA$$

はすべて再帰的／原始再帰的である．

(2c) において，関数 $f : \mathbf{N}^n \to \mathbf{N}$ の**全域性**（すなわち，$\mathrm{dom}(f) = \mathbf{N}^n$）を保証する条件 $\forall x_1 \cdots \forall x_n \exists y\, g(x_1, \ldots, x_n, y) = 0$ をはずして定義される部分関数は再帰的部分関数と呼ばれるものになる．正確な定義を述べるために，まず 2 つの部分関数 $f(x_1, \ldots, x_n), g(x_1, \ldots, x_n)$ の間の等号 $\sim$ を次のように定める．f と g が同じ定義域をもち，その上で両関数の値が一致するとき，$f \sim g$ とする．

定義 1.11　**再帰的部分関数**を以下のように定義する：

(1)　**ゼロ関数** Z，**後者関数** S，**射影関数** P_i^n は再帰的部分関数である．

(2a)　**関数合成.** $g_i : \mathbf{N}^n \to \mathbf{N}, h : \mathbf{N}^m \to \mathbf{N}$ $(1 \leq i \leq m)$ が再帰的部分関数のとき，

$$f(x_1, \ldots, x_n) \sim h(g_1(x_1, \ldots, x_n), \cdots, g_m(x_1, \ldots, x_n))$$

で定義される合成関数 $f = h(g_1, \ldots, g_m) : \mathbf{N}^n \to \mathbf{N}$ は再帰的部分関数である．但し，$h(g_1(x_1, \ldots, x_n), \cdots, g_m(x_1, \ldots, x_n))$ は，各 $g_i(x_1, \ldots, x_n) = y_i$ が定義され，$h(y_1, \ldots, y_m) = z$ が定義されるときに限り定義されて，値 z をとる．

(2b)　**原始再帰法.** $g:\mathbf{N}^n\rightarrow\mathbf{N}, h:\mathbf{N}^{n+2}\rightarrow\mathbf{N}$ が再帰的部分関数のとき,

$$f(x_1,\ldots,x_n,0)\sim g(x_1,\ldots,x_n)$$
$$f(x_1,\ldots,x_n,y+1)\sim h(x_1,\ldots,x_n,y,f(x_1,\ldots,x_n,y))$$

で定義される関数 $f:\mathbf{N}^{n+1}\rightarrow\mathbf{N}$ は再帰的部分関数である.

(2c)　**最小化.** $g:\mathbf{N}^{n+1}\rightarrow\mathbf{N}$ を再帰的部分関数とする.「$g(x_1,\ldots,x_n,c)=0$ で, かつ各 $z<c$ に対し $g(x_1,\ldots,x_n,z)$ が定義され 0 以外の値をとる」ならば $\mu y(g(x_1,\ldots,x_n,y)=0)=c$ とし, そのような c が存在しないとき $\mu y(g(x_1,\ldots,x_n,y)=0)$ は定義されないとする. このとき,

$$f(x_1,\ldots,x_n)\sim\mu y(g(x_1,\ldots,x_n,y)=0)$$

となる関数 $f:\mathbf{N}^n\rightarrow\mathbf{N}$ は再帰的部分関数である.

再帰的関数が再帰的部分関数であることは直ちに言えるが, 全域的な再帰的部分関数が再帰的関数になることは明らかではない. 例えば, (2c)において, g が全域的でなくても, f が全域的になる場合がある. しかし, 次に述べる再帰的部分関数の標準形定理から, これは簡単な事実となる.

定理 1.6 (クリーネの標準形定理)　原始再帰的関数 $U(y)$ と原始再帰的関係 $T_n(e,x_1,\ldots,x_n,y)$ が存在して, 任意の n 変数再帰的部分関数 $f(x_1,\ldots,x_n)$ は, ある e について,

$$f(x_1,\ldots,x_n)\sim U(\mu yT_n(e,x_1,\ldots,x_n,y))$$

と表せる. ここで, $\mu yT_n(e,x_1,\ldots,x_n,y)$ は $\mu y((1-\chi_{T_n}(e,x_1,\ldots,x_n,y))=0)$ のことである.

証明のアイデア　チューリング機械を使って考える. チューリング機械は, 無限に延長可能な入出力兼作業用のテープをもっており, 動作開始時にテープに書かれていた記号列（数）に, 停止時にテープに残る記号列（数）を対応させることで, 計算可能な関数を実現する. 任意の再帰的部分関数がチューリング機械によって表

現できることは簡単にわかるから，チューリング機械によって計算できる関数が，$U(\mu y T_n(e, x_1, \ldots, x_n, y))$ の形で表せることを示せばよい．

いま，次のような原始再帰的関係 $T_n(e, x_1, \ldots, x_n, y)$ を定義する：

$T_n(e, x_1, \ldots, x_n, y) \Leftrightarrow$ “y はコード e のチューリング機械に列 $(x_1, \ldots, x_n)$ を入力したときの全計算過程のコードである．”

そして，計算過程のコード y から出力情報を取り出す原始再帰的関数を $U(y)$ とすれば，$U(\mu y T_n(e, x_1, \ldots, x_n, y))$ は，コード e をもつチューリング機械に列 $(x_1, \ldots, x_n)$ を入力したときの出力結果に他ならない． □

上の証明で構成した U と T_n を固定して，$U(\mu y T_n(e, x_1, \ldots, x_n, y))$ を**指標** e の n 変数再帰的部分関数と呼び，$\{e\}^n(x_1, \ldots, x_n)$ あるいは簡単に$\{e\}(x_1, \ldots, x_n)$ と書く．

$\{e\}$ の定義から直ちに次のことがいえる．

定理 1.7 (枚挙定理) $\{e\}(x_1, \ldots, x_n)$ は $e, x_1, \ldots, x_n$ に関する $(n+1)$ 変数の再帰的部分関数である．

定理 1.8 (パラメータ定理，S-m-n 定理) 原始再帰的関数 S_n^m が存在し，

$$\{e\}^{m+n}(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) \sim \{S_n^m(e, y_1, \ldots, y_m)\}^n(x_1, \ldots, x_n).$$

証明のアイデア チューリング機械のコード e と列 $(y_1, \ldots, y_m)$ が予め与えられているとし，次のようなチューリング機械を作る．それは列 $(x_1, \ldots, x_n)$ を入力すると，その後ろに $(y_1, \ldots, y_m)$ を書き込んで $(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m)$ としてから，コード e のチューリング機械の動作を模倣する．このチューリング機械の設計は，e と $(y_1, \ldots, y_m)$ から簡単に，正確には原始再帰的に作成できる．すなわち，原始再帰的関数 S_n^m が存在して，$S_n^m(e, y_1, \ldots, y_m)$ がそのコードとなる． □

定理 1.9 (再帰定理) $f(x_1, \ldots, x_n, y)$ を再帰的部分関数とする．このとき，e が存在して，

$$\{e\}^n(x_1, \ldots, x_n) \sim f(x_1, \ldots, x_n, e)$$

となる．

証明　パラメータ定理により，$\{g(y)\}(x_1, \ldots, x_n) \sim \{y\}(x_1, \ldots, x_n, y)$ となる原始再帰的関数 $g(y)$ が存在する．すると，$f(x_1, \ldots, x_n, g(y))$ は再帰的部分関数であり，指標 d をもつ．そこで，$e = g(d)$ とおけば，

$$\{g(d)\}(x_1, \ldots, x_n) \sim \{d\}(x_1, \ldots, x_n, d) \sim f(x_1, \ldots, x_n, g(d)). \quad \square$$

再帰定理を使うと，例えば

$$\{e\}(x) \sim \{e\}(x-1) + \{e\}(x+1)$$

を満たす再帰的部分関数$\{e\}$が存在する．原始再帰法では，$\{e\}(x)$ の定義の右辺に $\{e\}(x+1)$ が現れることはなかった．しかし，この定理によれば，$\{e\}(x)$ を定義するのに$\{e\}$のあらゆる情報を使うことができる．但し，この例でもそうだが，解の関数の定義域は空にもなりうることに注意せよ．

次の等式で定義される関数 f は**アッケルマン関数**と呼ばれる：

$$f(0, y) = y+1, f(x+1, 0) = f(x, 1), f(x+1, y+1) = f(x, f(x+1, y)).$$

アッケルマン関数が計算可能な関数であることは定義から自明であるが，それが再帰的関数になることを示すには再帰定理が使われる．再帰定理によってアッケルマン関数は再帰的部分関数であることがわかり，しかも全域関数になることは明らかだから，クリーネの標準形定理によって再帰的関数になる．

では，再帰的でない計算可能な全域関数はあるだろうか？　計算可能性を「チューリング機械での計算可能性」と定めれば，そういう関数がないことは，クリーネの標準形定理の証明からもわかる．しかし，素朴な意味での計算可能性がいつも再帰的関数として実現できるというのは一種の経験則であって**チャーチ＝チューリングの提唱**と呼ばれている．

ここでもう一つアッケルマン関数に関連した注意をしておこう．再帰的グラフを

もつ全域関数は再帰的関数であるが，原始再帰的グラフをもつ全域関数が原始再帰的とは限らない．アッケルマン関数のグラフは原始再帰的集合だが，その関数は原始再帰的でないことが知られている．しかし，再帰的／原始再帰的関数のグラフはいつも再帰的／原始再帰的である．

定義 1.12 n 項関係 $R \subset \mathrm{N}^n$ が**再帰的に枚挙可能**(**recursively enumerable** 略して **RE**) であるとは，

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} 1 & R(x_1, \ldots, x_n) \text{ のとき} \\ \text{未定義} & \text{そうでないとき} \end{cases}$$

となる部分関数 f が再帰的部分関数になることである．

直ちに分かることとして，どんな再帰的部分関数の定義域も RE である．また，どんな再帰的（部分）関数の値域も RE になることがいえ，「再帰的に枚挙可能」という名は実はその性質を表している．他にも RE と同値な条件がたくさんあるが，基本的なものを次の補題にまとめておく．

補題 1.10 関係 $R \subset \mathrm{N}^n$ について，次の条件は同値である．

（1） R は再帰的に枚挙可能．

（2） R は空集合かある原始再帰的関数の値域になる．

（3） R は有限集合かある再帰的単射（1対1関数）の値域になる．

（4） R はある再帰的部分関数の値域になる．

（5） ある原始再帰的関係 S が存在して，$R(x_1, \ldots, x_n) \Leftrightarrow \exists y\, S(x_1, \ldots, x_n, y)$．

再帰的部分関数のグラフは RE であり，また RE のグラフをもつ部分関数は再帰的部分関数である．

さて，次の3つの定理は，再帰的集合と RE 集合の関する最も重要な事実である．

定理 1.11 n 項関係 R が再帰的集合であるための必要十分条件は，R とその否定 $\neg R = \mathrm{N}^n - R$ が共に RE になることである．

証明 必要性は明らかである．十分であることを示すため，Rと $\neg R$ が共に RE

であるとする．上の補題より，原始再帰的関係 S, T が存在して，$R(x_1, \ldots, x_n) \Leftrightarrow \exists y S(x_1, \ldots, x_n, y)$，$\neg R(x_1, \ldots, x_n) \Leftrightarrow \exists y T(x_1, \ldots, x_n, y)$ と表せる．$R \vee \neg R$ より，$\exists y(S \vee T)$ だから，$\mu y S \vee T$ は再帰的 n 変数関数になる．すると容易に $R(x_1, \ldots, x_n) \Leftrightarrow S(x_1, \ldots, x_n, \mu y S \vee T)$ がいえるから，R は再帰的関係である．□

定理 1.12　再帰的でない RE 集合が存在する．

証明　$K = \{e : e \in dom(\{e\})\}$ とおく．$\{x\}(y)$ は2変数の再帰的部分関数と考えられるから，K は RE 集合である．あとは，$\neg K$ が RE でないことをいえばよい．$\neg K$ が RE として，$\neg K = dom(\{d\})$ とする．$d \in K \Leftrightarrow d \in dom(\{d\}) \Leftrightarrow d \in \neg K$ だから，$d \in K$ でも $d \in \neg K$ でも矛盾が生じる．よって，$\neg K$ は RE ではなく，従って K は再帰的でない．□

定理 1.13　共通部分を持たない2つの RE 集合 A, B で，次の性質を持つものが存在する．A を含み，B との共通部分が空になるような再帰的集合 C は存在しない．（このとき，A と B とは**再帰的に分離不能**であるという．）

証明　2つの RE 集合を $A = \{e : \{e\}(e) \sim 0\}, B = \{e : \{e\}(e) \sim 1\}$ とする．もし A と B を分離する再帰的集合 C があれば，その特性関数の指標を d として，$\{d\}(d)$ を考える．d は全域関数だから，$\{d\}(d) = 0$ または 1 であるが，いずれにしても矛盾がでる．□

これらの定理は，ゲーデルの第一不完全性定理と密接な関係をもっている．その関係の考察は，次章で扱う2階算術の体系 WKL_0 のルーツとしても重要なので，やや大雑把な議論になるが，最後に不完全性定理について述べておこう．

まず，自然数上の基本的な計算が行える適当な公理系 T が与えられているとする．T はペアノの公理系でもいいし，次章で導入する2階算術のどの体系でもいい．（厳密には ω-無矛盾，あるいは N をその（算術部分の）モデルに持ち得ることが条件となる．）T における各論理式には自然数（ゲーデル数）が一意に対応しているとし，論理式とそのコードを同一視する．また，数 n とその形式表現 $(\overbrace{1+\cdots+1}^{n\text{個}})$

も区別しない．

いま，T で証明可能な命題全体を P_T とし，$N_T=\{\varphi : \neg\varphi\in P_T\}$ とおく．T が普通の公理系であれば，P_T は（従って，N_T も）RE であり，かつ $P_T\cap N_T=\emptyset$（無矛盾）である．このとき，次の補題が成り立つ．

補題 1.14 (RE 集合の弱表現定理) 任意の RE 集合 S について，ある論理式 $\varphi(n)$ が存在して，

$$n\in S \quad\Leftrightarrow\quad \varphi(n)\in P_T.$$

補題 1.10 を応用して，すべての RE 集合は $\mathbf{N}$ 上で Σ^0_1 論理式（定義は次章）によって表せる．普通の算術体系 T では真なる Σ^0_1 文はすべて証明でき（Σ^0_1-完全性），また証明できる Σ^0_1 文は真となる（ω-無矛盾）．さらに，次のこともいえる．

補題 1.15 (再帰的集合の表現定理) 任意の再帰的集合 S について，ある論理式 $\varphi(n)$ が存在して，

$$n\in S \quad\Rightarrow\quad \varphi(n)\in P_T,$$

$$n\notin S \quad\Rightarrow\quad \varphi(n)\in N_T.$$

補題 1.14 から，ゲーデルの第一不完全性定理は容易に導かれる．

定理 1.16 (ゲーデルの第一不完全性定理) T は不完全，すなわち $P_T\cup N_T$ に入らない文がある．

証明 いま，K を再帰的でない RE 集合とする．RE 集合の弱表現定理より，ある論理式 $\varphi(n)$ が存在して，

$$n\in K \quad\Leftrightarrow\quad \varphi(n)\in P_T.$$

他方，$\mathbf{N}-K$ は RE でないから，ある d が存在して，

$$d\in\mathbf{N}-K \quad\not\Leftrightarrow\quad \varphi(d)\in N_T.$$

この d について，$d\in K$ かつ $\varphi(d)\in N_T$ ならば，$\varphi(d)\in P_T\cap N_T$ となって T は矛盾する．そこで，$d\notin K$ かつ $\varphi(d)\notin N_T$ とすると，$\varphi(d)$ は P_T にも N_T にも属さ

ないことになり，T は不完全である．□

上の証明は再帰的でない RE 集合の存在から不完全性定理を導いたものであるが，一般の教科書のように対角化定理から不完全性定理を導く場合でも，結局は P_T が再帰的でない RE 集合であることを証明していることになる．

対角化定理との関連をもう少し説明しておく．一般に，

$$\pi_G \quad \Leftrightarrow \quad \pi_G \notin P_T$$

となる命題 π_G を**ゲーデル文**と呼ぶ．上の定理の証明では，$\neg\varphi(d)$ がゲーデル文になっているが，その存在を再帰理論を経由せずに導く手法が対角化定理である．定義からゲーデル文は必ず Π^0_1 文である．もしゲーデル文 π_G が偽だとすると，Σ^0_1 文 $\neg\pi_G$ は真であり，Σ^0_1-完全性から $\neg\pi_G \in P_T$ となる．一方，π_G が偽なら $\pi_G \in P_T$ が真になるので，P_T は矛盾していることになる．従って，π_G は真である．すると，$\neg\pi_G$ が証明できるはずはなく（ω-無矛盾性），またゲーデル文の定義から $\pi_G \notin P_T$ だから，T は不完全である．

次は，補題 1.15 の一般化である．

補題 1.17　A, B を共通部分を持たない 2 つの RE 集合 A, B とする．このとき，ある論理式 $\psi(n)$ が存在して，

$$n \in A \Rightarrow \psi(n) \in P_T, \qquad n \in B \Rightarrow \psi(n) \in N_T.$$

証明　A, B を RE 集合とすると，ある再帰的関係 Q, R が存在して，

$$n \in A \Leftrightarrow \exists m Q(m,n), \qquad n \in B \Leftrightarrow \exists m R(m,n)$$

と書ける．Q, R は共に再帰的だから，補題 1.15 より論理式 $\varphi_1(m,n), \varphi_2(m,n)$ が存在して，

$$Q(m,n) \Rightarrow \varphi_1(m,n) \in P_T, \qquad \neg Q(m,n) \Rightarrow \varphi_1(m,n) \in N_T,$$
$$R(m,n) \Rightarrow \varphi_2(m,n) \in P_T, \qquad \neg R(m,n) \Rightarrow \varphi_2(m,n) \in N_T.$$

そこで，

$$\psi(n) = \exists m\,(\varphi_1(m,n) \wedge \forall k{<}m \neg \varphi_2(k,n))$$

とおくと，

$$n \in A \Rightarrow \psi(n) \in P_T, \qquad n \in B \Rightarrow \psi(n) \in N_T$$

がいえる（演習問題）． □

定義 1.13 P_T と N_T が再帰的に分離不能であるとき，T は**本質的に決定不能** **(essentially undecidable)** という．

T が本質的に決定不能であるとき，T の任意の無矛盾拡大 T' に対し $P_{T'}$ は再帰的でなく，従って T' は不完全である．

定理 1.18 T は本質的に決定不能である．

証明 いま，A, B を再帰的に分離不可能な 2 つの RE 集合 A, B とする．上の補題から，ある論理式 $\psi(n)$ が存在して，

$$n \in A \Rightarrow \psi(n) \in P_T, \qquad n \in B \Rightarrow \psi(n) \in N_T.$$

もし，P_T と N_T を分離する再帰的集合 X($P_T \subset X$ かつ $N_T \cap X = \emptyset$) が存在すれば，集合 $C = \{n : \psi(n) \in X\}$は再帰的集合で，$A, B$ を分離することになるから矛盾である． □

第一不完全性定理と再帰理論はこのように関係が深いが，第二不完全性定理の方は大分事情が異なる．第一定理は証明可能性の限界を示しただけだが，第二定理は「T が無矛盾である」という意味の具体的な真なる命題が T で証明できないことを示している．第二定理の証明は第一定理を土台にしているものの，いわば全く次元が異なり，計算可能性などの現実的感覚を離れて，抽象的なロジックの世界で精緻な議論を尽くして行われるのである．詳しい議論は，田中編著『数学基礎論講義』（日本評論社）を参照していただくことにして，以下その概要だけを述べよう．

第二定理は，第一定理の証明を体系 T 内で行うことによって得られる．第一定理は，足し算とかけ算が普通に定義されていればどんな算術体系でも成り立つが，

その議論を埋め込むために第二定理の方はある程度の帰納法（Σ_1^0 論理式に関するものだけで十分）を要する．帰納法をどこまで弱められるかという最近の研究もあるのだが，ここでは Σ_1^0-帰納法を含む体系 T に限って議論する．

まず，論理式 φ のゲーデル数（の形式表現）を「φ」と書く．そして，$\varphi \in P_T$ を Σ_1^0 式 $\mathrm{Bew}_T(\ulcorner \varphi \urcorner)$ で表現すると，次の補題が成り立つ．

補題 1.19（ヒルベルト＝ベルナイス＝レーブの可導性条件）

D1．$T \vdash \varphi \quad \Rightarrow \quad T \vdash \mathrm{Bew}_T(\ulcorner \varphi \urcorner)$．

D2．$T \vdash \mathrm{Bew}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \wedge \mathrm{Bew}_T(\ulcorner \varphi \to \psi \urcorner) \to \mathrm{Bew}_T(\ulcorner \psi \urcorner)$．

D3．$T \vdash \mathrm{Bew}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \to \mathrm{Bew}_T(\ulcorner \mathrm{Bew}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \urcorner)$．

D1 は，Σ_1^0 完全性から直ちに導かれる．また，φ の証明と $\varphi \to \psi$ の証明を三段論法でつないだものが ψ の証明だから，D2 も明らか．最後に，D3 は D1 を T で形式化したものにすぎないが，その形式化を実行するのは大変な困難を伴うので，詳細は前掲書に譲る．

また，次を成り立たせる文 π_G の存在を仮定する．

$$T \vdash \pi_G \leftrightarrow \neg \mathrm{Bew}_T(\ulcorner \pi_G \urcorner).$$

これは（形式化された）対角化定理により得られるが，その証明は特に難しいものではない．そして，最後に

$$\mathrm{Con}(T) \equiv \neg \mathrm{Bew}_T(\ulcorner 0=1 \urcorner)$$

とおく．もちろん，$\mathrm{Con}(T)$ は“T が無矛盾（consistent）であること”を意味している．

補題 1.20　$T \vdash \mathrm{Con}(T) \leftrightarrow \pi_G$．

証明　最初に，$\mathrm{Con}(T) \to \pi_G$ を示す．まず，$T \vdash \pi_G \leftrightarrow \neg \mathrm{Bew}_T(\ulcorner \pi_G \urcorner)$ と D1 より，

$$T \vdash \mathrm{Bew}_T(\ulcorner \mathrm{Bew}_T(\ulcorner \pi_G \urcorner) \to \neg \pi_G \urcorner).$$

これに D2 を用いて，

$$T \vdash \mathrm{Bew}_T(\ulcorner \mathrm{Bew}_T(\ulcorner \pi_G \urcorner) \urcorner) \to \mathrm{Bew}_T(\ulcorner \neg \pi_G \urcorner).$$

D3 より，$T \vdash \mathrm{Bew}_T(\ulcorner \pi_G \urcorner) \to \mathrm{Bew}_T(\ulcorner \mathrm{Bew}_T(\ulcorner \pi_G \urcorner) \urcorner)$ だから，

$$T \vdash \mathrm{Bew}_T(\ulcorner \pi_G \urcorner) \to \mathrm{Bew}_T(\ulcorner \neg \pi_G \urcorner).$$

$T \vdash \pi_G \to (\neg \pi_G \to 0=1)$ と D2 を用いて，上のことから

$$T \vdash \mathrm{Bew}_T(\ulcorner \pi_G \urcorner) \to \mathrm{Bew}_T(\ulcorner 0=1 \urcorner)$$

を得る．対偶をとって，

$$T \vdash \neg \mathrm{Bew}_T(\ulcorner 0=1 \urcorner) \to \neg \mathrm{Bew}_T(\ulcorner \pi_G \urcorner),$$

すなわち，$T \vdash \mathrm{Con}(T) \to \pi_G$ が示された．

逆はもっと簡単である．$T \vdash 0=1 \to \pi_G$ だから，D1 と D2 によって，

$$T \vdash \mathrm{Bew}_T(\ulcorner 0=1 \urcorner) \to \mathrm{Bew}_T(\ulcorner \pi_G \urcorner).$$

対偶をとって，$T \vdash \pi_G \to \mathrm{Con}(T)$ を得る． □

定理 1.21（ゲーデルの第二不完全性定理）　$T \nvdash \mathrm{Con}(T)$.

証明　第一不完全性定理(1.16)の証明により，$T \nvdash \pi_G$．上の補題によって，$T \vdash \mathrm{Con}(T) \leftrightarrow \pi_G$ だから，$T \nvdash \mathrm{Con}(T)$． □

第一不完全性定理は証明可能性の限界を示したという意味でネガティブな結果なのに対し，第二定理は Con(T) という具体的命題が T で証明できないことを示しており，少なくとも応用面では極めてポジティブな成果である．例えば，2つの公理系が相異なることを示す常套手段は，一方において他方の無矛盾性を証明することであり，それは2章以降で度々用いられる．

1.4　算術的階層と解析的階層

関数 $\xi : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ を任意に固定する．このとき，関数 $f : \mathbf{N}^n \to \mathbf{N}$ が ξ において

計算可能（簡単に，ξ-**計算可能**）であるとは，ξ をデータ・ベースに用いて f を計算するアルゴリズムがあるということである．チューリング機械による計算では，本来の作業テープの他に，ξ のデータを記憶したテープが与えられ，そこからいつでも必要な情報（$\xi(n)$ の値）が取り出せるものとする．このとき，ξ を**オラクル**（**神託**）といい，このようなチューリング機械を**オラクル付きチューリング機械**と呼ぶ．

1.3 節で定義した 3 つの関数のクラス（原始再帰的関数，再帰的関数，再帰的部分関数）はそれぞれ，ξ-原始再帰的関数，ξ-再帰的関数，ξ-再帰的部分関数に拡張できる．定義の修正は簡単で，各定義の条件（1）において ξ を初期関数に加えればよい．複数のオラクルをもつ場合も同様である．原始再帰的関数の場合を以下に示す．

定義 1.14　自然数から自然数への関数の有限列 $\Xi=\{\xi_1, \ldots, \xi_k\}$ を任意に定める．Ξ において**原始再帰的関数**（簡単に，Ξ-**原始再帰的関数**）を，次のように定義する：

（1）　ゼロ関数 Z，後者関数 S，射影関数 P_i^n，および各 ξ_j は，Ξ-原始再帰的関数である．

(2a)　関数合成．Ξ-原始再帰的関数を合成してつくられる関数は，Ξ-原始再帰的関数である．

(2b)　原始再帰法．Ξ-原始再帰的関数から原始再帰法で定義される関数は，Ξ-原始再帰的関数である．

Ξ-**再帰的関数**，Ξ-**再帰的部分関数**も同様に定義される．これらの定義において Ξ は無限列や任意濃度の集合であっても差し支えないが，以下の議論を不必要に複雑にしないため，Ξ は全域的関数の有限列と仮定しておく．特性関数が Ξ-原始再帰的関数になるような集合を Ξ-原始再帰的な集合，Ξ-再帰的関数になるものを Ξ-再帰的な集合という．そして，Ξ-再帰的部分関数の定義域になるものが Ξ-再帰的枚挙可能（RE）集合である．前節で述べた再帰理論の定理はすべて，オラク

ルを付けた形に拡張でき，それらはもとの定理の**相対化**と呼ばれる．いくつかの定理の相対化を見てみる．

定理 1.22（クリーネの相対化標準形定理） 原始再帰的関数 $U(y)$ と Ξ-原始再帰的関係 $T^{\Xi}(e, x_1, \ldots, x_n, y)$ が存在し，Ξ-再帰的部分関数 $f(x_1, \ldots, x_n)$ はいずれも，ある e に対して，

$$f(x_1, \ldots, x_n) \sim U(\mu y\, T^{\Xi}(e, x_1, \ldots, x_n, y))$$

と表せる．

証明はもとの定理の証明と殆ど変わらない．Ξ-原始再帰的な関係 $T^{\Xi}(e, x_1, \ldots, x_n, y)$ を次のように定義する：

$T^{\Xi}(e, x_1, \ldots, x_n, y) \Leftrightarrow$ “y はコード e のチューリング機械がオラクル Ξ のもとで列 $(x_1, \ldots, x_n)$ を入力したときの計算過程のコードである”

計算過程のコードから出力結果を取り出す原始再帰的関数 $U(y)$ は Ξ に直接依存しない．$U(\mu y\, T^{\Xi}(e, x_1, \ldots, x_n, y))$ は，オラクル Ξ のもとでコード e をもつチューリング機械に列 $(x_1, \ldots, x_n)$ を入力したときの出力結果である．$U(\mu y\, T^{\Xi}(e, x_1, \ldots, x_n, y))$ を指標 e の Ξ-再帰的部分関数と呼び，$\{e\}^{\Xi}(x_1, \ldots, x_n)$ と書く．

考察１．コード e と列 $(x_1, \ldots, x_n)$ を与えて，コード e のチューリング機械がオラクル Ξ の下で列 $(x_1, \ldots, x_n)$ の入力に対してなす動作をシミュレートするようなオラクル Ξ をもつ万能チューリング機械が（Ξ の内容とは無関係に）存在する．このことから，$\{e\}^{\Xi}(x_1, \ldots, x_n)$ において，Ξ は一種の変数であると考えることができる．

考察２．Ξ の各オラクル ξ_j は無限個のデータからなるが，実際の計算にはその有限部分しか用いられない．とくに，計算過程のコードが y ならば，各オラクル ξ_j は精々その始切片 $\xi_j|_y = (\xi_j(0), \xi_j(1), \cdots, \xi_j(y-1))$ しか使われない．従って，原始再帰的な関係 $T(e, x_1, \ldots, x_n, y, z_1, \ldots, z_k)$ があって，

$$T^{\Xi}(e, x_1, \ldots, x_n, y) \Leftrightarrow T(e, x_1, \ldots, x_n, y, \xi_1|_y, \ldots, \xi_k|_y)$$

と表すことも可能である．

以上の考察を踏まえ，

$$F(x_1, \ldots, x_n, \xi_1, \ldots, \xi_k) = U(\mu y\, T(e, x_1, \ldots, x_n, y, \xi_1|_y, \ldots, \xi_k|_y))$$

によって定義される関数 $F : \mathrm{N}^n \times (\mathrm{N}^{\mathrm{N}})^k \to \mathrm{N}$ を**指標** e の**再帰的部分汎関数**と呼ぶ．ここで，N^{N} は N から N への関数全部の集合である．同様にして，**原始再帰的汎関数**や**再帰的汎関数**も考えられる．

定理 1.23（相対化枚挙定理） $\{e\}^{\Xi}(x_1, \ldots, x_n)$ は $e, x_1, \ldots, x_n$ に関する Ξ-再帰的部分関数であり，また $e, x_1, \ldots, x_n, \Xi$ に関する再帰的部分汎関数でもある．

定理 1.24（相対化パラメータ定理，相対化 S-m-n 定理） 原始再帰的関数 S_n^m が存在し，

$$\{e\}^{\Xi}(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) \sim \{S_n^m(e, y_1, \ldots, y_m)\}^{\Xi}(x_1, \ldots, x_n)$$

また，原始再帰的汎関数 $S_{n,k}^{m,j}$ が存在し，

$$\{e\}(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m, \xi_1, \ldots, \xi_k, \zeta_1, \ldots, \zeta_j)$$
$$\sim \{S_{n,k}^{m,j}(e, y_1, \ldots, y_m, \zeta_1, \ldots, \zeta_j)\}(x_1, \ldots, x_n, \xi_1, \ldots, \xi_k)$$

定理 1.25（相対化再帰定理） $f(x_1, \ldots, x_n, y)$ を Ξ-再帰的部分関数とする．このとき，e が存在して，

$$\{e\}^{\Xi}(x_1, \ldots, x_n) \sim f(x_1, \ldots, x_n, e)$$

となる．

汎関数 $F : \mathrm{N}^n \times (\mathrm{N}^{\mathrm{N}})^k \to \mathrm{N}$ を用いることで，$\mathrm{N}^n \times (\mathrm{N}^{\mathrm{N}})^k$ の部分集合の様々なクラスが考えられる．特性関数が原始再帰的汎関数になる関係は $\Sigma^0_{0,\mathrm{pr}}$ または $\Pi^0_{0,\mathrm{pr}}$ であるといい，その関係の集まりを単に $\Sigma^0_{0,\mathrm{pr}}$ または $\Pi^0_{0,\mathrm{pr}}$ で表す．$\Sigma^0_{0,\mathrm{pr}}$ 関係の前に自然数の存在記号 $\exists x$ や全称記号 $\forall x$ を付けて定義される関係は**算術的**

(arithmetical) であるという．

同種の量化記号が並んで現れる場合は，次のように1つの記号にまとめることができる：

$$\exists x_1 \cdots \exists x_n R(x_1, \ldots, x_n) \Leftrightarrow \exists x R(c(x,0), \cdots, c(x, n-1))$$

ここで，$c(x,i)$ はコード x をもつ長さ n の数列の i 番目の要素 x_i を取り出す原始再帰的関数である．もう少し詳しく言えば，$p(x)$ で x 番目の素数を表し，

$$x = p(0)^{x_0+1} p(1)^{x_1+1} \cdots p(n-1)^{x_{n-1}+1}$$

とおいて，

$$c(x,i) = x_i = \mu y(\neg \exists z(p(i)^{y+2} z = x))$$

で与えられる．$\forall x$ についても同様な簡約が可能．従って，算術的関係は，$\Sigma^0_{0,\mathrm{pr}}$ 関係の前に存在記号 $\exists x$ と全称記号 $\forall x$ が交互に並んだものと考えられる．

存在記号 $\exists x$ で始まり，$\exists$ と $\forall$ が交互に現れる $n(\geq 1)$ 個の算術量化記号が $\Sigma^0_{0,\mathrm{pr}}$ 関係の前におかれた形の論理式，またはその式で定まる関係を Σ^0_n という．全称記号 $\forall x$ で始まる $n(\geq 1)$ 個の交互の算術量化記号が $\Sigma^0_{0,\mathrm{pr}}$ 関係の前におかれた論理式，またはその式で定まる関係を Π^0_n という．Σ^0_n 式でも，Π^0_n でも記述される集合は Δ^0_n 集合と呼ばれる．Σ^0_1 集合は再帰的部分汎関数の定義域と一致し，$\Delta^0_1 = \Sigma^0_1 \cap \Pi^0_1$ は特性関数が再帰的汎関数になる集合に一致する．

問題　R, S を2つの Σ^0_2 関係とする．$R \wedge S$ は Σ^0_2 関係であることを示せ．$\forall y < z R$ も Σ^0_2 関係であることを示せ．（ヒント：$\exists x \forall y A(x,y) \wedge \exists x \forall y B(x,y) \Leftrightarrow \exists x \exists x' \forall y \forall y' A(x,y) \wedge B(x',y')$ 及び $\forall w < z \exists x \forall y A(x,y,w) \Leftrightarrow \exists x \forall w < z \forall y A(c(x,w), y, w)$．）

定理 1.26（算術的枚挙定理）　各 $i \geq 1$ について，$\mathbf{N}^{n+1} \times (\mathbf{N}^{\mathbf{N}})^k$ の Σ^0_i（または Π^0_i）部分集合 U で次の性質をもつものが存在する．任意の $\mathbf{N}^n \times (\mathbf{N}^{\mathbf{N}})^k$ の Σ^0_i（または Π^0_i）部分集合 R に対し，ある e が存在し，

$$R(x_1, \ldots, x_n, \xi_1, \ldots, \xi_k) \Leftrightarrow U(e, x_1, \ldots, x_n, \xi_1, \ldots, \xi_k).$$

証明　Σ^0_1 集合の場合は，枚挙定理による．Π^0_1 集合については，Σ^0_1 集合に対する U の補集合を考えればよい．$i>1$ に対して，Σ^0_i や Π^0_i の関係は，Σ^0_1 または Π^0_1 関係の前に算術量化記号を付けたものだから，Σ^0_1 または Π^0_1 の U の前に適当な算術量化記号を付けたもので表わされる．　□

定理 1.27（算術的階層定理）　すべての $i \geq 1$ について，

$$\Sigma^0_i \cup \Pi^0_i \subsetneq \Delta^0_{i+1}.$$

証明　算術的枚挙定理と対角線論法による．算術的枚挙定理 $(n=1, k=0)$ によって，存在が示される N^2 の Σ^0_i 部分集合 U に対し，$\neg U(e,e)$ で定義される N^1 の Π^0_i 部分集合 $V(e)$ を考える．もし，$V(e)$ が Σ^0_i であれば，ある e_0 が存在して $V(e) \Leftrightarrow U(e_0, e)$ となるが，これに $e=e_0$ を代入して $\neg U(e_0, e_0) \Leftrightarrow V(e_0) \Leftrightarrow U(e_0, e_0)$ となるから矛盾である．よって，$V(e)$ は Σ^0_i でない．さらに，$W(e) \Leftrightarrow \neg V(e)$ とおけば，$W(e)$ は Π^0_i にならない N^1 の Σ^0_i 部分集合である．そこで，$Z(e,d) \Leftrightarrow (V(e) \wedge d=0) \vee (W(e) \wedge d>0)$ とおくと，$Z(e,d)$ は N^2 の Δ^0_{i+1} 部分集合であることは明らかであるが，Σ^0_iでも Π^0_iでもないことが簡単に示せる（練習問題）．　□

$\Sigma^0_{0,\mathrm{pr}}$ 関係に，自然数の量化記号に加えて，1 変数関数の存在記号 $\exists\xi$ や全称記号 $\forall\xi$ を付けた式で定義される関係を**解析的**(analytical) という．解析的関係の階層構造を調べるために，まずその定義式の形を整える手順を示しておこう．同種の関数量化記号が並んで現れる場合は，以下のように 1 つにまとめられる：

$$\exists\xi_1 \cdots \exists\xi_n\, R(\xi_1, \ldots, \xi_n) \Leftrightarrow \exists\xi R(\lambda\, x.\xi(x,0), \ldots, \lambda\, x.\xi(x, n-1))$$

ここで，ξ は厳密には 1 変数関数であるが，ペア (x,i) を自然数 $2^{x+1} \cdot 3^{i+1}$ でコード化することにより，2 変数関数のように扱うことができる．さらに，$\xi(x,i)$ の i を固定してそれを変数 x だけの関数と考えたものが $\lambda x.\xi(x,i)$ である．並んだ全称記号 $\forall\xi$ の簡約も同様である．

また，関数の量化記号を自然数の量化記号の前に出す操作が可能である．

$$\forall x \forall \xi R(x,\xi) \Leftrightarrow \forall \xi \forall x\, R(x,\xi),$$

$$\exists x \exists \xi R(x,\xi) \Leftrightarrow \exists \xi \exists x\, R(x,\xi),$$

$$\forall x \exists \xi R(x,\xi) \Leftrightarrow \exists \xi \forall x\, R(x,\lambda y.\xi(y,x)),$$

$$\exists x \forall \xi R(x,\xi) \Leftrightarrow \forall \xi \exists x\, R(x,\lambda y.\xi(y,x)).$$

ここで，3番目と4番目の変換には選択公理を用いている．もしこの公理を認めない立場でも，必要に応じて次のように自然数の量化記号を関数の量化記号に変えてしまえば,すべての自然数の量化記号は関数の量化記号より内側にあるとしてよい．

$$\exists x R(x) \Leftrightarrow \exists \xi R(\xi(0)),$$

$$\forall x R(x) \Leftrightarrow \forall \xi R(\xi(0)).$$

以上を踏まえ，$\exists \xi$ で始まり，$\exists$ と $\forall$ の関数量化記号が交互に計 $n(\geq 0)$ 個，算術的関係の前におかれた論理式，及びその式で定まる関係を Σ^1_n という．また，$\forall \xi$ で始まる $n(\geq 0)$ 個の交互の関数量化記号が算術的関係の前におかれた論理式，及びその式で定まる関係を Π^1_n という．Σ^1_n 式でも，Π^1_n でも記述される集合は Δ^1_n 集合と呼ばれる．注：$\Sigma^1_0 = \Pi^1_0 = \Delta^1_0 =$ {算術的集合}.

定理 1.28（解析的論理式の標準形定理） 各 $i \geq 1$ について，任意の Σ^1_i 式（または Π^1_i 式）に対し，それと論理的に同値な Σ^1_i 式（または Π^1_i 式）で，内側の算術的関係が丁度1つの量化記号しかもたないものが存在する．そして，その量化記号の種類（$\exists, \forall$）は関数量化記号の最後のものと反対になる．

例を示すことで証明に代える．その前に，次の簡単な事実を述べておく．

$$\forall x \exists y R(x,y) \Leftrightarrow \exists \xi \forall x R(x,\xi(x)),$$

$$\exists x \forall y R(x,y) \Leftrightarrow \forall \xi \exists x R(x,\xi(x)).$$

この事実は，厳密に言えば論理法則だけで証明できるものではないが，選択公理までは必要としない（ACA_0 が必要十分）．$\forall x \exists y R(x,y)$ が成立する場合，各 x につ

いて $R(x,y)$ を成り立たせる最小の自然数 y を選ぶ関数を ξ とすれば，$\forall x R(x,\xi(x))$ となるからである．（$\forall x \exists \xi R(x,\xi)$ の場合との違いに注意されたい．選択公理なしには，$R(x,\xi)$ を成り立たせる ξ を選ぶ基準はない．）

さて，次の変形例をみてみよう：

$$
\begin{aligned}
&\forall \xi \exists x \forall y \exists z \forall w R(x,y,z,w,\xi)\\
&\quad \Leftrightarrow \forall \xi \forall \zeta \exists x \exists z \forall w R(x,\zeta(x),z,w,\xi)\\
&\quad \Leftrightarrow \forall \xi \forall \zeta \exists x \forall w R(c(x,0),\zeta(c(x,0)),c(x,1),w,\xi)\\
&\quad \Leftrightarrow \forall \xi \forall \zeta \forall \gamma \exists x R(c(x,0),\zeta(c(x,0)),c(x,1),\gamma(x),\xi)\\
&\quad \Leftrightarrow \forall \xi \exists x R(c(x,0),\xi(c(x,0),1),c(x,1),\xi(x,2),\lambda y.\xi(y,0))
\end{aligned}
$$

最後に得られた式が，$\prod_1^1$ 式の標準形である．

問題　R を $\sum_2^1$ 関係，S を $\prod_2^1$ 関係とする．$R \wedge S$ は Δ_3^1 関係であることを示せ．

定理 1.29（解析的枚挙定理）　$\mathbf{N}^{n+1} \times (\mathbf{N}^{\mathbf{N}})^k$ の $\sum_i^1$ 部分集合 U で次の性質をもつものが存在する．$\mathbf{N}^n \times (\mathbf{N}^{\mathbf{N}})^k$ の任意の $\sum_i^1$ 部分集合 R に対し，ある e が存在し，

$$R(x_1,\ldots,x_n,\xi_1,\ldots,\xi_k) \Leftrightarrow U(e,x_1,\ldots,x_n,\xi_1,\ldots,\xi_k).$$

証明　算術的枚挙定理の証明と同様にできる．　□

定理 1.30（解析的階層定理）

$$\textstyle\sum_n^1 \cup \prod_n^1 \subsetneqq \Delta_{n+1}^1.$$

証明　算術的階層定理と同様に証明できる．　□

最後に，集合変数を含む論理式で定義される集合の階層について簡単に述べておこう．集合を特性関数で表わせば，集合量化記号は一種の関数量化記号として扱うことができる．逆に，２階算術の体系では集合変数が先にあって，関数をグラフによって定義するので，関数量化記号を集合量化記号に翻訳することになる．いずれにしても，集合の量化記号と関数の量化記号は１対１に相互翻訳できるのだが，関数量化記号を集合量化記号に直す場合には（やってみればわかることだが），内側

の算術記号の部分がやや複雑になることに注意したい．そのため，集合変数による階層では，定理1.28はそのままの形では成り立たない．内側の算術的関係に最低2つの量化記号が必要になるのである．詳細はこの分野の専門書（Rogers の本など）を見ていただくしかないが，少し論理式で遊んでみればこの辺りのことは容易に納得できるであろう．

第2章　逆　数　学

2.1　逆数学の概要

数学の定理の証明にどれだけの公理が必要かという問題を，数学基礎論の現代的な舞台装置の上で考えてみようというのが「逆数学」の主題である．

数学は，学ぶ立場で見れば，公理から定理を導く論理の道筋つまり証明の集まりである．では，数学者は公理をインプットして定理をアウトプットする機械みたいなものか，というと決してそうではない．（“数学者はコーヒーを定理に変換する機械である”というエルデシュの名言もあるが……）数学者のアクティビティーとしては，むしろそれとは全く逆に，ある命題の論証にどれくらいの前提が必要かなどと考えていることが多い．例えば，大学の解析学では，集合，実数，連続関数，微積分……と概念が組み立てられていくのに対し，それらの発見の歴史は全く逆向きである．あとでも述べるように，コーシーが連続関数に関する中間値の定理を証明した（？）のは，実数の公理（あるいは定義）が発見されるより前だった．そういう意味で，数学の歴史は一般に考えられているよりずっと実験科学に近い発展をしてきたのである．

さて，「逆数学」という名の研究プログラムでは，とくに2階算術という枠組みにおいて，ある定理を証明するのにどの程度の集合存在公理が必要かを調べている．必要な存在公理によって数学の命題の世界に等高線を入れてみると，数学史の流れや，異なる理論間の感覚的な類似性が，うまく捉えられるというのがこの研究の売り物である．たとえば，中間値の定理より実数の公理（例：ワイエルシュトラスの上限に関する公理）の方が強い存在公理を必要とすることが証明される．それは数学史の流れがより高度な集合論を求める方向に進んだとも解釈できるであろう．

ここで，2階算術について簡単に説明しておこう．自然数を対象とした理論を

「1階算術」といい，自然数と自然数からなる集合の両者を対象とした理論を「2階算術」という．2階算術の公理系 Z_2 は，自然数の順序や和積演算に関する1階算術の諸公理と，定義し得るどんな自然数の集まりも“集合”として扱えることを保証する集合存在公理（内包公理）から成り立っている．体系 Z_2 は「実数論」あるいは「解析」とも呼ばれ，一般の数学のかなりの部分がそこで展開できることはヒルベルトとベルナイスの研究以来よく知られている．もちろん，集合論を使えばもっと楽に現代数学の殆どをカバーできるが，それでは逆に器が大きすぎて中間値の定理と実数の公理を区別するような議論はしにくいのである．

体系 Z_2 の集合存在公理に種々の制限を付けることによりいろいろな部分体系が得られる．以下の議論において特に重要な体系は（証明能力の）弱い方から順に，$\mathrm{RCA}_0, \mathrm{WKL}_0, \mathrm{ACA}_0, \mathrm{ATR}_0, \Pi^1_1\text{-}\mathrm{CA}_0$ の5つである．正確な定義は後にまわすが，例えば RCA_0 は Recursive Comprehension Axiom（再帰的内包公理）の頭文字をとったもので，この体系では再帰的集合の存在のみが保証されている．これら5つの体系の無矛盾性は証明論においてすでに確立したもの（とくに $\Pi^1_1\text{-}\mathrm{CA}_0$ の無矛盾性の証明は竹内外史氏による）と考えられているが，それより本質的に強い集合存在公理を持つ体系の無矛盾性についてはまだ論議が続いている．

1974年頃，H. フリードマンは Z_2 の各部分体系でどれだけの数学が展開できるかを調べ，次のような現象に気付いた：

> 数学の定理の多くは RCA_0 で証明できるか，そうでなければ上にあげた他の4つの体系のどれかと論理的に同値であることが RCA_0 において証明できる．

これは「逆数学現象」と呼ばれ，その後もこのパターンに当てはまる数多くの定理がS. シンプソンを中心とする研究グループによって発見されている．しかし，この現象に当てはまらない例も少なからず知られている．

以下，5つの公理系とそこで証明できる定理の特徴などについて簡単に述べる．正確な定義は，次節以降で与える．

1．RCA_0. この体系は，大雑把にいうと，計算可能解析学 (computable analysis) とか再帰的代数学 (recursive algebra) などの形式化にあたる．この体系で集合や関数の存在をいうためには，それらを計算するアルゴリズムを構成する必要がある．例えば，中間値の定理に対しては，2分法のアルゴリズムで中間値を計算できるので，この定理は RCA_0 で成り立つことになる．

2．WKL_0. この体系は，RCA_0 に“無限個の頂点を持つ2分木は無限長の道 (path) をもつ”という弱い形のケーニヒの補題 (Weak König's Lemma) を公理として加えたものである．2分木を有限分岐木に置き換えた命題が一般のケーニヒの補題で，これは次に述べる ACA_0 と同値になる．WKL_0 では閉区間 [0,1] のコンパクト性（ハイネ＝ボレルの定理）などが証明でき，WKL_0 で展開される数学は RCA_0 上の数学よりずっと豊かで，かつ数学的に自然なものになる．しかし，証明論的には，つまり無矛盾性に関しては2つの体系は同等であることが知られている（3.3，3.4節参照）．

3．ACA_0. 算術的内包公理 (Arithmetical Comprehension Axiom) は，算術的論理式によって定義される集合の存在を主張するもので，この公理を RCA_0 に加えてできる体系が ACA_0 である．算術的内包公理と同値になる定理には，ボルツァーノ＝ワイエルシュトラスの定理，ベクトル空間の基底の存在などがある．また，ACA_0 はペアノの1階算術 PA の保存的拡大になっている．

4．ATR_0. 算術的内包公理を超限回繰り返して得られる集合の存在を主張するのが算術的超限再帰 (Arithmetical Transfinite Recursion) の公理であり，これを RCA_0 に加えたものが ATR_0 である．この超限操作は，開集合のクラス G から始めて，可算集合演算によって $G_\delta, G_{\delta\sigma}, \cdots$ のようにボレル集合を構成してゆく手続きに相応するもので，スースリンの分離定理など記述集合論のいろいろな定理がこの体系と同値なる．

5．$\Pi^1_1-CA_0$. Π^1_1 論理式で定義される集合の存在を要請する公理を RCA_0 に

加えたものが，Π^1_1-CA_0 である．この体系と同値になる定理には，任意の可算アーベル群が最大加除部分群を直積因子にもつというウルムの定理などがあるが，ここまで強い公理を必要とする普通の数学の定理はむしろ少ない．

2.2 RCA_0 と解析学の基礎

最初に，2階算術の言語を定義する．原則として，$a, b, c, \cdots, m, n, \cdots$ など小文字で自然数の上を動く変数，$X, Y, Z, \cdots$ など大文字で集合の上の変数を表す．数に関する変数記号と定数記号 0, 1 を，2項演算記号 $+, \cdot$ 及び括弧を適当に使って組み合わせたものを**項**という．例えば，$(m+1)\cdot((n+1)+1)$ などが項である．t_1 と t_2 を項とするとき，$t_1 = t_2, t_1 < t_2$ あるいは $t_1 \in X$ の形の記号列を**原子式**と呼ぶ．一般の**論理式**は，原子式から，$\neg, \vee$ などの命題結合記号と，算術量化記号 $\forall n$, $\exists n$ 及び 集合量化記号 $\forall X, \exists X$ を使って組立てられる．

与えられた論理式において，量化記号 $\forall n, \exists n, \forall X, \exists X$ のスコープに入る変数 n, X は**束縛されている**という．束縛されていない変数は**自由である**という．例えば，$\exists X \forall m (m \in Y \to n \cdot m \in X)$ において m と X が束縛されており，n と Y が自由である．1つの論理式の中で同じ変数記号が複数箇所に現れ，あるところでは束縛され，別のところでは自由であるということもありうる．論理式を $\varphi(n, X)$ などと表すとき，表示された n や X はその論理式におけるそれらの変数の自由な出現箇所全部を指示している(自由な出現が全くない場合でもよい)．従って，$\varphi(a, A)$ は $\varphi(n, X)$ における n と X の自由な出現すべてをそれぞれ a と A で置き換えてできる論理式である．自由変数は**パラメータ**とも呼ばれ，パラメータを含んでいない論理式は**閉じた**式あるいは**文**とも呼ばれる．

論理式はその形によって次のように分類される．まず，原子式から命題演算記号と有界量化記号 $\forall n < t, \exists n < t$ だけを使って作られる論理式を有界な式または Π^0_0 式あるいは Σ^0_0 式と呼ぶ．ここで，$\forall n < t$ は $\forall n (n < t \to \cdots)$, $\exists n < t$ は $\exists n (n < t \wedge \cdots)$ の省略形で，t は n を含まない項とする．集合量化記号を含まない式を**算術的**また

は Π^1_0 あるいは Σ^1_0 という．φ が Σ^0_j 式のとき $\forall n_1 \cdots \forall n_k \varphi$ を Π^0_{j+1} 式，φ が Π^0_j 式のとき $\exists n_1 \cdots \exists n_k \varphi$ を Σ^0_{j+1} 式という．また，φ が Σ^1_j 式のとき $\forall X_1 \cdots \forall X_k \varphi$ を Π^1_{j+1} 式，φ が Π^1_j 式のとき $\exists X_1 \cdots \exists X_k \varphi$ を Σ^1_{j+1} 式という．この定義では，どの分類にも属さない式が多数ある．例えば，φ が Π^i_j 式のとき（Π^0_0 式を除いて），$\neg\varphi$ は上の分類に属さないが，それと論理的に同値な Σ^i_j 式が直ぐに見つかるので，$\neg\varphi$ を Σ^i_j 式と呼ぶこともある．任意の式に対し，それと同値な式で上の分類に入るものを見つける手続きがあるが，ここではその事実を必要としないので，あえて議論しない．

さて，**再帰的内包公理の体系** RCA_0 は次の公理からなる．

（0）　1階述語論理：第1章を参照．自然数の間の等号についてはいわゆる等号の公理を仮定する．集合の間の等号 $X=Y$ は後で $\forall n(n\in X \leftrightarrow n\in Y)$ によって定義する．

（i）　基本算術公理：

$$n+1\neq 0, \qquad n+1=m+1\rightarrow n=m,$$
$$n+0=n, \qquad n+(m+1)=(n+m)+1,$$
$$n\cdot 0=0, \qquad n\cdot(m+1)=n\cdot m+n,$$
$$n<m \leftrightarrow \exists k(k\neq 0 \wedge n+k=m).$$

（ii）　Δ^0_1－内包公理（Δ^0_1－CA）：

$$\forall n(\varphi(n)\leftrightarrow\psi(n))\rightarrow \exists X\forall n(n\in X\leftrightarrow\varphi(n)).$$

ただし，$\varphi(n)$ は Σ^0_1 式，$\psi(n)$ は Π^0_1 式で，X を自由変数として含まないものとする．この公理は集合 $X=\{n:\varphi(n)\}$ の存在を保証するものである．

（iii）　Σ^0_1－帰納法：任意の Σ^0_1 式 $\varphi(n)$ について，

$$\varphi(0)\wedge\forall n(\varphi(n)\rightarrow\varphi(n+1))\rightarrow\forall n\varphi(n).$$

Δ^0_1－内包公理は，標準的な解釈のもとでは（即ち non-standard な数を含まないモデルの上では）再帰的集合の存在を主張していることになるので，再帰的内包公理とも呼ばれる．もう少し正確にいうと，Δ^0_1－内包公理における $\varphi(n)$ や $\psi(n)$ は X 以外の集合パラメータを含むことができるので，この公理が要請することは，すでに存在する集合をオラクルに用いて計算できる集合が存在すること，つまり集合の宇宙が recursive-in という関係で閉じていることである．

X, Y を自然数の集合とする．$X \subseteq Y$ は $\forall n (n \in X \to n \in Y)$ の略記とし，$X = Y$ は $X \subseteq Y \wedge Y \subseteq X$ とする．項の等式 $t_1 = t_2$ は Π^0_0 式だが，集合の等式 $X = Y$ は Π^0_1 式であることに注意せよ．

自然数の**ペア** (m, n) を $\dfrac{(m+n)(m+n+1)}{2} + m$ の値の自然数でコードする．$X \times Y$ は，X の元と Y の元からなるペア（のコード）全部の集合である．すなわち，

$$n \in X \times Y \leftrightarrow \exists x \leq n \, \exists y \leq n \, (x \in X \wedge y \in Y \wedge (x, y) = n)$$

と書け，右辺は Σ^0_0 式だから，$X \times Y$ の存在は RCA_0 で保証される．また，n–組 $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ は $((\cdots(x_1, x_2), \cdots), x_n)$ によって定義し，その全体を $X_1 \times \cdots \times X_n$ と書く．

関数 $f : X \to Y$ は，集合 $A \subseteq X \times Y$ で，$\forall x \forall y_0 \forall y_1 ((x, y_0) \in A \wedge (x, y_1) \in A \to y_0 = y_1)$ かつ $\forall x \in X \exists y \in Y (x, y) \in A$ を満たすものをいう．そして，$(x, y) \in A$ のとき，$f(x) = y$ と書く．

$X = \{i \in N : i < n\}$ を定義域とする関数 f を**長さ** n の**有限列**という．このとき，長さ n を $leng(f)$ で表す．長さ n の有限列 f を n–組 $(f(0), f(1), \cdots, f(n-1))$ と同一視することがある．

補題 2.1 集合 X が有界，すなわち $\forall x (x \in X \to x < k)$ となる k が存在するならば，正の数 m, n が存在して，

$$\forall x (x \in X \leftrightarrow x < k \wedge (m(x+1)+1 \text{ は } n \text{ の約数})).$$

このとき，上記を満たす最小の数 (m, n) を X のコードとする．

証明 まず，k を固定しておく．すべての $i<k$ を約数として持つような数 m の存在は Σ^0_1－帰納法で簡単にいえる．(注意：$m=(k-1)!$ もこれを満たすが，階乗の存在は後で示す原始再帰法を用いない限りまだ自明ではない.) このとき，すべての $i<k$ について，$m(i+1)+1$ は互いに素となる．なぜなら，$i<j<k$ として，$m(i+1)+1$ と $m(j+1)+1$ が共に素数 d の倍数であると仮定すれば，d は m の約数になることはなく，従って $d \geq k$ である．他方，$(m(j+1)+1)-(m(i+1)+1)=m(j-i)$ も d の倍数になるはずだが，素数 d は m の約数でなく，$d \geq k > j-i$ だから矛盾である．

最後に，$j \leq k$ についての Σ^0_1－帰納法で，

$$\exists n \, \forall x < j \, (x \in X \leftrightarrow m(x+1)+1 \text{ は } n \text{ の約数})$$

をいう．$j=0$ のとき，明らか．j のときに上式を満たす n を n_j とする．いま，$j \in X$ ならば $n_{j+1}=n_j \cdot (m(j+1)+1)$ とおき，そうでなければ $n_{j+1}=$ (n_j を $m(j+1)+1$ で割った余り) とおくと，$j+1$ に対して n_{j+1} は上式を満たす．最後に，$j=k$ として題意が成り立つ． □

系 2.2 有限列はコードをもつ．

定義域が自然数全体になるような関数を**全域関数**という．RCA_0 では，すべての再帰的全域関数のグラフの存在はいえるが，それらが全域関数であることは必ずしも証明できない．(後で述べるように，RCA_0 は PRA と同じ全域関数を持つ.)

補題 2.3 RCA_0 における全域関数全体は原始再帰法によって閉じている．

証明 n-変数関数 g と $(n+2)$-変数関数 h が与えられたとき，

$$f(x_1, \ldots, x_n, 0) = g(x_1, \ldots, x_n)$$
$$f(x_1, \ldots, x_n, y+1) = h(x_1, \ldots, x_n, y, f(x_1, \ldots, x_n, y))$$

を満たす $(n+1)$-変数関数 f が Δ^0_1 関係として定義できることを言えばよい．まず，次のように Σ^0_0 述語 $\varphi(\sigma)$ を定義する．

$\varphi(\sigma) \Leftrightarrow$ σ は長さ k の有限列で，かつ $k>0$ ならば

$$\sigma(0)=g(x_1,\ldots,x_n) \wedge \forall y<k-1\ (\sigma(y+1)=h(x_1,\ldots,x_n,y,\sigma(y))).$$

すると，

$$\begin{aligned} f(x_1,\ldots,x_n,y)=z \quad &\Leftrightarrow \quad \exists\sigma(leng(\sigma)=y+1\wedge\varphi(\sigma)\wedge\sigma(y)=z) \\ &\Leftrightarrow \quad \forall\sigma((leng(\sigma)=y+1\wedge\varphi(\sigma))\rightarrow\sigma(y)=z) \end{aligned}$$

となるから，f は Δ^0_1 として存在する．□

さらに，RCA_0 に関する有用な事実をいくつか紹介しておこう．

補題 2.4 RCA_0 における関数全体は最小化演算 μ によって閉じている．

証明 $g(x_1,\ldots,x_n)=\mu y(f(x_1,\ldots,x_n,y)=0)$ をわれわれの言葉で表現すれば，

$$((x_1,\ldots,x_n),y)\in g \Leftrightarrow ((x_1,\ldots,x_n,y),0)\in f\wedge\forall z<y((x_1,\ldots,x_n,z),0)\notin f$$

となる．右辺は Σ^0_0 式だから，g の存在は明らか．□

最小化演算 μ のもとで全域性を保つためには，$\forall x_1\cdots\forall x_n\exists y(((x_1,\ldots,x_n,y),0)\in f)$ が成り立つ必要があるが，RCA_0 でこれが証明できるような f は原始再帰的なものに限られることが知られている（定理 3.29 参照）．

補題 2.5 RCA_0 において，任意の Σ^0_1 式 $\varphi(n)$ に対し，$\forall n(n\in X\leftrightarrow\varphi(n))$ となる有限集合 X が存在するか，1 対 1 関数 $f:\mathbf{N}\rightarrow\mathbf{N}$ が存在して，$\forall n(\exists m f(m)=n\leftrightarrow\varphi(n))$ となる．

証明 任意の Σ^0_1 式 $\varphi(n)$ は，Σ^0_0 式 $\theta(m,n)$ を使って，$\varphi(n)\leftrightarrow\exists m\theta(m,n)$ と表せる．いま，$(\Sigma^0_0\text{-CA})$ より，集合 Y を

$$(m,n)\in Y\leftrightarrow\theta(m,n)\wedge\forall m'<m\neg\theta(m',n)$$

で定義する．Y が有界ならば，あるkが存在して，

$$\varphi(n)\leftrightarrow\exists m<k(m,n)\in Y$$

となるから，有限集合 $X=\{n:\varphi(n)\}$ の存在が $(\Sigma^0_0\text{-CA})$ でいえる．そうでなけ

れば，補題 2.3 および 2.4 を用いて，Y の要素を（大きさの順に）並べ上げる関数，つまり $\mathbf{N}$ から Y の上への1対1関数 g が作れる．さらに，ペア (m,n) の第2要素 n を取り出す射影関数 $p_2(m,n)=n$ を使って，$f=p_2 \cdot g$ とおけば，f も1対1関数で，その値域は $\{n : \varphi(n)\}$ になる． □

補題 2.6　RCA_0 において，次の形の集合存在公理が証明できる．

$$(\text{有界 } \Sigma_1^0\text{-CA}): \forall n \exists X \forall i (i \in X \leftrightarrow (i<n \land \varphi(i))).$$

ただし，$\varphi(i)$ は Σ_1^0 式で，X を自由変数として含まないものとする．

証明　任意の n を固定し，$\forall i (i \in X \leftrightarrow (i<n \land \varphi(i)))$ となる有限集合 X が存在しなければ，上の補題から $\forall i (\exists m f(m)=i \leftrightarrow (i<n \land \varphi(i)))$ となる1対1関数 $f : \mathbf{N} \to \{0, \cdots, n-1\}$があることになるが，これは明らかに不合理である． □

補題 2.7　RCA_0 において，Π_1^0−帰納法が証明できる．

証明　$\psi(i)$ を任意の Π_1^0 式として，$\psi(0)$ かつ $\forall n(\psi(n) \to \psi(n+1))$ を仮定する．いま，n を任意に固定する．補題 2.6 により，$\forall m(m \in X \leftrightarrow (m<n+1 \land \neg\psi(m)))$ となる集合 X がある．さらに，$\forall m(m \in Y \leftrightarrow m \notin X)$ によって集合 Y を定義する．このとき，$\forall m(m \in Y \leftrightarrow \psi(m) \lor m>n)$ だから，$0 \in Y$ かつ $\forall m(m \in Y \to m+1 \in Y)$ は明らか．従って，帰納法公理により，$\forall m(m \in Y)$．とくに $n \in Y$ となるから，$\psi(n)$ である．n は任意にとったから，$\forall n \psi(n)$ を得る． □

問題　RCA_0 において，次の式が成り立つことを示せ．

$$(\text{S}-\Sigma_1^0) : \forall m \exists n \forall i<m (\exists j \varphi(i,j) \to \exists j<n \varphi(i,j)).$$

ここで，$\varphi(i,j)$ は Σ_1^0 式で，n を自由変数として含まないものとする．$(\text{S}-\Sigma_1^0)$ は，**強 Σ_1^0 有界公理**と呼ばれる

さて，これから，RCA_0 において実数論ないし解析学の初歩がいかに展開されるかを見ていこう．まず，自然数全体の集合を $\mathbf{N}=\{n : n=n\}$ で定義しておく．$\mathbf{N}$ 上の演算 $+, \cdot$ 等は，RCA_0 の相応する演算等をグラフで表現したものとする．例えば，$+$ は$\{((x,y),z) : x+y=z\}$ とする．

$\mathbf{N}\times\mathbf{N}$ 上の同値関係 $=_Z$ を $(k,l)=_Z(m,n)\leftrightarrow k+n=l+m$ によって定義する．そして，$=_Z$ の各同値類から最小の数を代表元に選んで，それを**整数**と呼び，その全体を $\mathbf{Z}$ とおく．ここで，(k,l) は整数 $k-l$ をコードしている．また，$\mathbf{Z}$ 上の演算は，$(k,l)+(m,n)=_Z(k+m,l+n)$, $(k,l)\cdot(m,n)=_Z(km+ln,kn+lm)$ 等で定める．すると，$\mathbf{Z}$ は整数環としての基本性質を満たすことが確かめられる．

次に，$\mathbf{Z}\times(\mathbf{Z}-\{(0,0)\})$ 上の同値関係 $=_Q$ を $(k,l)=_Q(m,n)\leftrightarrow kn=lm$ によって定義する．そして，$=_Q$ の各同値類からコードの最小なものを代表元に選んで，それを**有理数**と呼び，その全体を $\mathbf{Q}$ とおく．ここで，(k,l) は有理数 $\dfrac{k}{l}$ をコードしている．$\mathbf{Q}$ 上の演算を，$(k,l)+(m,n)=_Q(kn+lm,ln)$, $(k,l)\cdot(m,n)=_Q(km,ln)$ 等で定める．すると，$\mathbf{Q}$ は有理数体として基本性質を満たす．

さて，実数を有理数から構成する代表的な方法には，「デーデキントの切断」によるものと「カントルの基本列」によるものがある．前者は，最後に同値類で割るといった操作を必要としないのが利点であるが，代わりに RCA_0 では扱いに困る問題を生じる．例えば，2つの実数列 $\{X_n\},\{Y_n\}$ が与えられたとき，その要素毎の和の列 $\{X_n+Y_n\}$ の存在が一般にいえないのである．標準自然数の上でその具体的な例を考えてみよう．

$f(x)$ を値域が再帰的にならない再帰的関数とする．いま，デーデキント切断の列 $\{X_n\}$ を次のように定義する．n が f の値域に入らないとき $X_n=$ 円周率 $\pi=\{q\in\mathbf{Q}: q<\pi\}$，$n$ が f の値域に入るなら $f(t)=n$ となる最小の t を使って $X_n=\pi+\dfrac{1}{2^t}$ とおく．このとき，$q\in X_n\Leftrightarrow q\in\pi\vee\exists t\,(q\in\pi+\dfrac{1}{2^t}\wedge f(t)=n)\Leftrightarrow q\in\pi\vee\forall t\,(q\in\pi+\dfrac{1}{2^t}\vee\exists s<t f(s)=n)$ となるから，$\{X_n\}$ は再帰的である．他方，$n\in range(f)\Leftrightarrow X_n>\pi\Leftrightarrow 0\in X_n-\pi$ であり，$range(f)$ は再帰的でないから $\{X_n-\pi\}$ も再帰的でない．すなわち，切断の列 $\{X_n\}$ が存在しても，その各要素から無理数 π を引いてできる切断の列 $\{X_n-\pi\}$ の存在は RCA_0 では証明できない．このような性質の欠如は解析学を展開するのに致命的である．そこで，以下ではカントルの定義を採用する．

有理数列 $\{q_n\}$ が $\forall n \forall i(|q_n - q_{n+i}| \leq 2^{-n})$ を満たすとき，それを**実数**と呼び，$\{q_n\} \in \mathbf{R}$ と書く．$\mathbf{Q}$ は 2 階算術における集合であるが，$\mathbf{R}$ は集合に関する述語であって 2 階算術の意味では集合にならないことに注意する．実数上の等号，不等号をそれぞれ次のように定義する：

$$\{p_n\} = \{q_n\} \Leftrightarrow \forall n(|p_n - q_n| \leq 2^{-n+1}),$$
$$\{p_n\} < \{q_n\} \Leftrightarrow \exists n(q_n - p_n > 2^{-n+1}).$$

すると，2 つの実数 $\{p_n\}, \{q_n\}$ について，$\{p_n\} = \{q_n\}$ か $\{p_n\} < \{q_n\}$ か $\{q_n\} < \{p_n\}$ のいずれか 1 つが成立する．実際，$\{p_n\} < \{q_n\}$ でも $\{q_n\} < \{p_n\}$ でもなければ，$\forall n(q_n - p_n \leq 2^{-n+1})$ かつ $\forall n(p_n - q_n \leq 2^{-n+1})$ となるから，$\forall n(|p_n - q_n| \leq 2^{-n+1})$，つまり $\{p_n\} = \{q_n\}$ である．

また，2 つの実数 $\{p_n\}$ と $\{q_n\}$ の和は次のように定義する：

$$\{p_n\} + \{q_n\} = \{p_{n+1} + q_{n+1}\}.$$

このとき，

$$\begin{aligned} |(p_{n+1} + q_{n+1}) - (p_{n+1+i} + q_{n+1+i})| &\leq |p_{n+1} - p_{n+1+i}| + |q_{n+1} - q_{n+1+i}| \\ &\leq 2^{-n-1} + 2^{-n-1} \leq 2^{-n} \end{aligned}$$

となるから，$\{p_{n+1} + q_{n+1}\}$ は実数である．2 つの実数 $\{p_n\}$ と $\{q_n\}$ の積は次のように定義する：

$$\{p_n\} \cdot \{q_n\} = \{p_{n+m} \cdot q_{n+m}\}.$$

ここで，m は $\max(|p_0|, |q_0|) + 1 \leq 2^{m-1}$ となる最小の自然数とする．このとき，

$$\begin{aligned} &|p_{n+m} \cdot q_{n+m} - p_{n+m+i} \cdot q_{n+m+i}| \\ &\qquad \leq |q_{n+m}| \cdot |p_{n+m} - p_{n+m+i}| + |p_{n+m+i}| \cdot |q_{n+m} - q_{n+m+i}| \\ &\qquad \leq (|q_0| + 1) \cdot 2^{-n-m} + (|p_0| + 1) \cdot 2^{-n-m} \\ &\qquad \leq 2 \cdot (\max(|p_0|, |q_0|) + 1) \cdot 2^{-n-m} \\ &\qquad \leq 2 \cdot 2^{m-1} \cdot 2^{-n-m} = 2^{-n} \end{aligned}$$

となり，$\{p_n\}\cdot\{q_n\}$ も実数である．以上の定義のもとで，$(\mathbf{R}, +, \cdot, <, =)$ が**アルキメデス順序体**になることが RCA_0 で証明される．ここで一つ注意しておくと，普通の数学では上の $\mathbf{R}$ を同値関係＝で割って実数体を定義するが，$\mathbf{R}$ の各元は集合であるから同値類をとるような操作はここではできず，われわれは同値関係をそのまま等号とみなす．

次に，**実数列**を以下の条件を満たす関数 $f: \mathbf{N}\times\mathbf{N}\to\mathbf{Q}$ と定義する：

$f_n: \mathbf{N}\to\mathbf{Q}$ を $f_n(m)=f(n,m)$ によって定めれば，各 f_n は実数である．

この実数列を $\{f_n\}$ のようにも表す．また，実数列 $\{f_n\}$ の極限 $\lim_{n\to\infty} f_n$ を，$\forall\varepsilon>0\,\exists n\,\forall i\,(|a-f_{n+i}|<\varepsilon)$ となる実数 a と定める．この定義のもとで，次の区間縮小法の原理が RCA_0 において証明できる．

定理 2.8（区間縮小法の原理）　2つの実数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ が以下の条件を満たすとする：

$$\text{任意の } n \text{ について，} a_n\leq a_{n+1}\leq b_{n+1}\leq b_n,\ \text{かつ } \lim_{n\to\infty}|a_n-b_n|=0.$$

このとき，$c=\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty} b_n$ となる実数 c が存在することが RCA_0 で証明できる．

証明　まず，$a_n=\{p_{nm}\}, b_n=\{q_{nm}\}$ とする．いま，$p'_{nm}=p_{n(m+1)}-2^{-m-1}$，$q'_{nm}=p_{n(m+1)}+2^{-m-1}$ とおけば，やはり $a_n=\{p'_{nm}\}, b_n=\{q'_{nm}\}$ であって，任意の m に対して $p'_{nm}\leq a_n$ かつ $b_n\leq q'_{nm}$ となっている．

さて，$\lim_{n\to\infty}|a_n-b_n|=0$ だから，$\forall\varepsilon>0\,\exists n\,\forall m\geq n|a_m-b_m|<\varepsilon$．簡単な計算により $\forall\varepsilon>0\,\exists n\,\forall m\geq n|p'_{mm}-q'_{mm}|<\varepsilon$ もいえる．そこで，p''_k を次のように原始再帰的に定義する：$|p'_{nn}-q'_{nn}|<2^{-k}$ かつ $p''_{k-1}\leq p'_{nn}$ となる最小の n を選び，$p''_k=p'_{nn}$ とおく．すると，$p''_k=p'_{nn}\leq p''_{k+i}\leq q'_{nn}$ だから，$\{p''_k\}$ が実数になることは明らか．また，$\forall\varepsilon>0\,\exists n\,\forall m\geq n|a_m-p''_m|<\varepsilon$ や $\forall\varepsilon>0\,\exists n\,\forall m\geq n|b_m-p''_m|<\varepsilon$ も容易にいえ，$\{p''_k\}=\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty} b_n$ が成立する．　□

この定理を用いて，$\mathbf{R}$ が非可算であることを証明しよう．

定理 2.9 (R の非可算性)　任意の実数列 $\{a_n\}$ に対し，$\forall n(a_n \neq c)$ となる実数 c が存在することが RCA_0 で証明できる．

証明　まず，$a_n = \{p_{nm}\}$ とおく．原始再帰法を用いて，有理端点をもつ縮小閉区間列 $\{[q_n, r_n]\}$ を次のように定義する：

$$[q_0, r_0] = [0, 1],$$

$$[q_{n+1}, r_{n+1}] = \begin{cases} \left[\dfrac{q_n + 3r_n}{4}, r_n\right] & p_{n,2n+3} \leq \dfrac{q_n + r_n}{2} \text{のとき} \\ \left[q_n, \dfrac{3q_n + r_n}{4}\right] & \text{そうでないとき} \end{cases}$$

2つの数列 $\{q_n\}, \{r_n\}$ は明らかに定理 2.8 の条件を満たしており，$c = \lim_{n\to\infty} q_n = \lim_{n\to\infty} r_n$ となる実数 c が存在する．いま，n を任意に固定する．もし $p_{n,2n+3} \leq \dfrac{q_n + r_n}{2}$ ならば，$a_n \leq p_{n,2n+3} + 2^{-2n-3} \leq \dfrac{q_n + r_n}{2} + 2^{-2n-3} < \dfrac{q_n + r_n}{2} + \dfrac{2^{-2n}}{4} = \dfrac{q_n + r_n}{2} + \dfrac{r_n - q_n}{4} = q_{n+1} \leq c$．そうでないときは，$a_n \geq \dfrac{q_n + r_n}{2} - 2^{-2n-3} > r_{n+1} \geq c$．いずれにしても，$a_n \neq c$ が示された．□

次に，われわれは，R 上の連続関数を導入しよう．次の条件を満たす集合 $\Phi \subseteq \mathbf{Q}^4$ を**連続関数** $f: \mathrm{dom} f (\subseteq \mathbf{R}) \to \mathbf{R}$ のコードと呼ぶ：

（0）　$(p, q, r, s) \in \Phi \to p < q \wedge r \leq s$,

（1）　$(p, q, r, s), (p, q, r', s') \in \Phi \to r' \leq s$,

（2）　$(p, q, r, s) \in \Phi, r' \leq r \leq s \leq s' \to (p, q, r', s') \in \Phi$,

（3）　$(p, q, r, s) \in \Phi, p \leq p' \leq q' \leq q \to (p', q', r, s) \in \Phi$.

直観的には，$(p, q, r, s) \in \Phi$ は $\forall x(p < x < q \to r \leq f(x) \leq s)$ を意味する．実数 x がコード Φ の連続関数 f の**定義域**に属することを，

$$x \in \mathrm{dom} f \leftrightarrow \forall n \exists (p, q, r, s) \in \Phi (p < x < q \wedge s - r < 2^{-n})$$

によって定義する．このとき，$x \in \mathrm{dom} f$ ならば，$\forall (p, q, r, s) \in \Phi (p < x < q \to r \leq y \leq s)$ となる実数 y がただ一つ存在することが RCA_0 で示せる．(練習問題：補題 2.3

と定理 2.8 を使ってこれを示せ.）その y を $f(x)$ と書く.

RCA_0 で証明可能な連続関数の性質に，次の中間値の定理がある.

定理 2.10（中間値の定理） 定義域 $\mathrm{dom}\, f$ が閉区間 $[0,1]$ を含んでいるような連続関数 f が与えられて，$f(0)<0<f(1)$ が成立しているとする．このとき，$f(x)=0$ となる $x\in[0,1]$ が存在することが RCA_0 で証明できる.

証明 まず，すべての有理数 $q\in[0,1]$ に対して $f(q)\neq 0$ と仮定してよい．そうでなければ，定理はすでに成立している．任意の有理数 $q\in[0,1]$ について，$f(q)$ を表す有理数列を $\{p_n\}$ とすると，十分大きな n に対し $p_n<-2^{-n}$ か $2^{-n}<p_n$ の一方が成立するから，それによって $f(q)<0$ か $f(q)>0$ かが判定できる．従って，有理端点をもつ縮小閉区間列 $\{[p_n,q_n]\}$ を以下のように再帰的に定義することができる：

$$[p_0,q_0]=[0,1],$$

$$[p_{n+1},q_{n+1}]=\begin{cases}\left[\dfrac{p_n+q_n}{2},q_n\right] & f(p_n+q_n)<0 \text{ のとき}\\[2ex] \left[p_n,\dfrac{p_n+q_n}{2}\right] & f(p_n+q_n)>0 \text{ のとき}\end{cases}$$

このとき，定理 2.4 より $x=\lim_{n\to\infty}p_n=\lim_{n\to\infty}q_n$ となる実数 $x\in[0,1]$ が存在し，$f(x)=0$ となることは明らか. □

中間値の定理から直ちに得られる結論の一つは，**R** が「実閉体」になることである．しかし，2 階算術において **R** は集合ではないので，実閉体の理論の定理がすべて **R** に対して成り立つということは決して自明ではない．このことはメタ数学の議論を駆使してシンプソンと田中によって証明されているが，ここでは立ち入らない.

また，中間値の定理の系として，どんな連続関数 $f:[0,1]\to[0,1]$ も不動点を持つことが RCA_0 で証明できる．（中間値の定理を $x-f(x)$ に適用する.）しかし，これが 2 次元以上に単純に拡張できないという経験的事実は，ブラウワーの不動点定理が WKL_0 と同値になるという次節の結果によって裏付けられる.

最後に，RCA_0 で証明可能な主な定理を，上の結果を含めてまとめておこう．

定理群 1　次の定理はすべて RCA_0 で証明可能である．

（1）　区間縮小法の原理

（2）　中間値の定理

（3）　縮小写像に関するバナッハの不動点定理

（4）　完備可分距離空間におけるベールの定理

（5）　代数学の基本定理

（6）　無矛盾で完全な理論はモデルをもつ

2.3　$\mathbf{WKL_0}$ とヒルベルトのプログラム

まず，WKL_0 を定義するために必要な概念を導入する．前節で，長さ n の有限列は，定義域 $\{i\in\mathbf{N} : i<n\}$をもつ関数として定義された．とくに 0 または 1 の値だけをとる有限列を **2 進列**と呼び，2 進列のコード全体を Seq_2 と表そう．Seq_2 の部分集合 T で，その各要素のすべての**始切片** (initial segment) が再び T の要素となるようなものを**木** (tree) と呼ぶ．ここで，s が t の始切片であるとは，s と t を集合（関数のグラフ）としてみたとき，s が t の部分集合になることである．木 T の部分集合で，それ自身木であって，枝別れのない（つまり，任意の 2 つの要素に対し必ずどちらか一方が他方の始切片になる）ものを T の**道**(**path**) という．

以上のもとで，Seq_2 の無限部分木が必ず無限長の道を持つという主張を**弱ケーニヒの補題**(**weak König's lemma**) という．そして，RCA_0 にこれを公理として加えたものが体系 WKL_0 である．WKL_0 が RCA_0 より確かに強い体系であることを示す前に，次の有用な定理を証明しておこう．

定理 2.11　RCA_0 において，WKL_0 は次の主張と同値である：

$$(\Sigma^0_1\text{-SP}) : \forall n(\varphi(n)\to\psi(n))\to\exists X\forall n\{(\varphi(n)\to n\in X)\wedge(n\in X\to\psi(n))\},$$

ただし，$\varphi(n)$は Σ^0_1 式で，$\psi(n)$ は Π^0_1 式であり，どちらも X を自由変数として

含まないものとする．

SP は**分離原理** (Separation Principle) を意味する．上の分離原理において，前提の $\forall n(\varphi(n)\to\psi(n))$ を $\forall n(\psi(n)\leftrightarrow\psi(n))$ に直したものが Δ^0_1－内包公理に他ならない．従って，RCA_0 の(Δ^0_1－CA) を (Σ^0_1－SP) に置き換えた体系は WKL_0 と同値になる．しかし，RCA_0 の (Δ^0_1－CA) を弱ケーニヒの補題に置き換えても WKL_0 にはならない．端的には，2 階の領域が空でも弱ケーニヒの補題は自明に成立しているからである．

この定理を使えば，次を示すことは容易である．

系 2.12 WKL_0 は RCA_0 と一致しない．

証明 RCA_0 の最小モデル (ω, Rec) が WKL_0 のモデルにならないことを示せば十分．ここで，ω は標準自然数全体の集合で，Rec は ω の再帰的部分集合全体を表す．定理 1.13 により，再帰的に分離できない 2 つの RE 集合（を定義する Σ^0_1 式）がある．従って，(Σ^0_1－SP) は (ω, Rec) で成り立たない． □

定理 2.11 の証明 まず，WKL_0 において Σ^0_1－分離原理が成り立つことをいう．2 つ Σ^0_1 式 $\varphi_0(n), \varphi_1(n)$ が与えられ，$\forall n(\varphi_0(n)\to\neg\varphi_1(n))$，すなわち $\forall n\neg(\varphi_0(n) \wedge\varphi_1(n))$ と仮定する．いま，$\varphi_i(n)=\exists m\theta_i(m,n)$，ただし $\theta_i(m,n)\in\Sigma^0_0$ と表す．すると，次のような集合 $T\subseteq Seq_2$ が RCA_0 で定義できる：

$$t\in T\Leftrightarrow \forall m,n<leng(t)\,[(\theta_0(m,n)\to t(n)=0)\wedge(\theta_1(m,n)\to t(n)=1)].$$

この T が無限木になることは容易にわかるので，弱ケーニヒの補題により無限長の道 f が存在する．そこで，$X=\{n: f(n)=0\}$とおけば，$\forall n\{(\varphi_0(n)\to n\in X)\wedge (n\in X\to\neg\varphi_1(n))\}$となることは明らかである．

次は，Σ^0_1－分離原理を使って，弱ケーニヒの補題を導く．任意の無限木 $T\subseteq Seq_2$ を選んで固定しておく．いま，$i=0,1$ に対して，“$s\in Seq_2$ かつ $\{t\in T: s^\frown i\}\subseteq t\}$ が有限である” を表す Σ^0_1 式を $\varphi_i(s)$ とおく．ここで，$s^\frown i$ は 2 進列 s のあとに文字 i を付けたもので，厳密には $s\cup\{(leng(s), i)\}$ である．また “木 T' が有限で

ある”ことは十分大きな n に対して $T'\subseteq\{0,1\}^n$ と表現できることに注意．いま，$\varphi_i(s)=\exists m\theta_i(m,s)$ ただし $\theta_i(m,s)\in\Sigma_0^0$ とおき，さらに Σ_1^0－分離原理を使うために次のような修正を行う：

$$\varphi_i'(s)=\exists m(\theta_i(m,s)\wedge\forall k<m\neg\theta_{1-i}(k,s)).$$

すると，$\forall n\neg(\varphi_0'(n)\wedge\varphi_1'(n))$，すなわち $\forall n(\varphi_0'(n)\to\neg\varphi_1'(n))$ が成り立つから，Σ_1^0－分離原理によって，$\forall n\{(\varphi_0'(n)\to n\in X)\wedge(n\in X\to\neg\varphi_1'(n))\}$となる X が存在する．

さて，この X を使って，2 進列の増加列 $s_0\subset s_1\subset\cdots$ を次のように再帰的に定義する．s_0 を空列とする．$s_n\in X$ のとき$s_{n+1}=s_n{}^\frown\{1\}$，そうでないとき $s_{n+1}=s_n{}^\frown\{0\}$とおく．すると，任意の n について，$\{t\in T : s_n\subseteq t\}$は無限集合であり，とくに $s_n\in T$ であることは簡単に確かめられる．したがって，$f=\{s_n\}$ は T の無限道になる． □

それでは，WKL_0 において，解析学を展開していこう．有理端点 $p,q\,(p<q)$ をもつ**開区間**の自然数コードを (p,q) で表す．$\mathbf{R}$ の**開集合**は開区間のコードの集合として定義（コード化）される．**閉集合**はその補集合となる開集合のコードを転用して扱う．さて，$\mathbf{R}$ の開集合 U が閉区間 $[0,1]$ を**覆う**（の**被覆**である）ことを，任意の実数 $x\in[0,1]$ に対して，あるコード $(p,q)\in U$ が存在して，$p<x<q$ となることとする．このとき，開集合 U が閉区間 $[0,1]$ を覆えば，U の有限部分集合 U' でやはり $[0,1]$ を覆うものが存在するというのが，**ハイネ＝ボレルの被覆定理**である．まず，この定理が WKL_0 で証明できることを示そう．

定理 2.13 ハイネ＝ボレルの定理は WKL_0 で証明できる．

最初に，証明の考え方を示しておこう．任意の開被覆が有限開被覆をもつ性質を**コンパクト性**といい，コンパクト性は連続射像によって保存される．われわれが示したいことは閉区間 $[0,1]$ のコンパクト性であるが，カントル空間$\{0,1\}^{\mathbf{N}}$ から閉区間 $[0,1]$ の上へ $f\mapsto\sum_{i=0}^{\infty}f(i)\cdot 2^{-i-1}$ で定義される連続関数があるから，カン

トル空間のコンパクト性がいえればよい．しかし，カントル空間のコンパクト性を2階算術で表現したものが弱ケーニヒの補題に他ならない．以上の議論を2階算術の中で行おう．

証明 まず，各 $s \in Seq_2$ に，次のように定義される有理開区間 (a_s, b_s) を対応させる：

$$a_s = \sum_{i<leng(s)} \frac{s(i)}{2^{i+1}},$$

$$b_s = a_s + \frac{1}{2^{leng(s)}}.$$

このとき，$s \subseteq t$ ならば，$(a_t, b_t) \subseteq (a_s, b_s)$ である．

いま，$[0,1]$ の開被覆 U が与えられたとする．直観を助けるために，コード i を持つ開区間を (p_i, q_i) と表すことにする．そして，木 $T \subseteq Seq_2$ を以下のように定義する：

$$s \in T \Leftrightarrow \neg \exists i \leq leng(s)\,(i \in U \land p_i < a_s < b_s < q_i).$$

この T が無限の道を持たないことを示す．そのために，道 $f \subseteq T$ があるとして矛盾を導こう．区間縮小法により，すべての $s \in f$ に対し $a_s \leq x \leq b_s$ となる実数 x が（ただ一つ）存在する．開集合 U は $[0,1]$ を覆っているから，ある $i \in U$ が存在して，実数 x は開区間 (p_i, q_i) に含まれる．このとき，十分長い $s \in f$ をとれば，$p_i < a_s \leq x \leq b_s < q_i$ となるはずである．しかし，これは $s \notin T$ を意味するので，矛盾である．

T が無限の道を持たないならば，弱ケーニヒの補題により，T は有限集合である．つまり，十分大きな n が存在して，T に属する列の長さはすべて n より短い．従って，$\forall s\,(leng(s) = n \rightarrow \exists i \leq n\,(i \in U \land p_i < a_s < b_s < q_i))$．よって，$\{i \in U : i \leq n\}$ は $[0,1]$ の有限被覆になっている．□

定理 2.14 RCA_0 において WKL_0 とハイネ＝ボレルの定理は同値である．

証明のアイデア． カントル空間は $[0,1]$ の閉部分集合 $\{\sum_{i=0}^{\infty} f(i) \cdot 3^{-i-1}$:

$f\in\{0,2\}^{\mathbf{N}}\}$（3進集合）と同相であるから，ハイネ＝ボレルの定理はカントル空間のコンパクト性を含意し，よって WKL_0 を導く．

証明　すでに WKL_0 でハイネ＝ボレルの定理が成り立つことを示したので，ハイネ＝ボレルの定理を仮定して，弱ケーニヒの補題を導こう．

まず，準備として，各 $s\in Seq_2$ に，次のように定義される有理開区間 (a_s, b_s) を対応させる：

$$a_s=\sum_{i<leng(s)}\frac{2s(i)}{3^{i+1}},$$

$$b_s=a_s+\frac{1}{3^{leng(s)}}.$$

2進列 s のあとに文字 i を付けたもの $s\cup\{(leng(s),i)\}$を簡単に $s^\frown i$ と表すことにすると，閉区間 $[a_{s^\frown 0}, b_{s^\frown 0}]$ と閉区間 $[a_{s^\frown 1}, b_{s^\frown 1}]$ はそれぞれ閉区間 $[a_s, b_s]$ の左右3分の1になっている．従って，3進集合 $\{\sum_{i=0}^{\infty}f(i)\cdot 3^{-i-1} : f\in\{0,2\}^{\mathbf{N}}\}$ に属さない実数 x に対しては，それを含む開区間 $(b_{s^\frown 0}, a_{s^\frown 1})$ がただ一つ存在する．

さらに，各 $s\in Seq_2$ に対し，

$$a'_s=a_s-\frac{1}{3^{leng(s)+1}},$$
$$b'_s=b_s+\frac{1}{3^{leng(s)+1}}$$

とおく．ある集合 $A\subseteq T$ が任意の無限道 $f\subseteq T$ と1つ以上の要素を共有するならば，開集合 $\{(a'_s, b'_s) : s\in A\}$ は3進集合の被覆となることが容易に示せる．また，2つの開区間 $(a'_s, b'_s), (a'_t, b'_t)$ が共通部分を持つのは，s と t のどちらか一方が他方の始切片になる場合に限られる．

さて，$T\subseteq Seq_2$ を無限長の道を持たない任意の木とし，T が有限であることを示そう．ここで，B を T に含まれない極小の2進列の集まりとする．つまり，$s\in B\Leftrightarrow s\notin T\wedge \forall t\subset s(t\neq s\rightarrow t\in T)$ とする．このとき，任意の無限道 $f\subseteq T$ が B とちょうど1つの要素を共有することは明らかである．

そこで，$U=\{(a'_s, b'_s) : s\in B\}\cup\{(b_{s^\frown 0}, a_{s^\frown 1}) : s\in Seq_2\}$ とおけば，U は $[0,1]$ の

開被覆になっている．ハイネ＝ボレルの定理により，U の有限部分被覆 U' が存在する．どの $s\in B$ についても，(a'_s, b'_s) は他の $(a'_t, b'_t)\in U$ とは交わらないし，(a'_s, b'_s) は 3 進集合の補集合である $\bigcup\{(b_{s\frown 0}, a_{s\frown 1}) : s\in Seq_2\}$ の部分集合にもならないので，U' は $\{(a'_s, b'_s) : s\in B\}$ を完全に含む．従って，B は有限集合である．B の要素の始切片全体から B の要素を除いてできる集合が T だから，それもまた有限である．□

WKL_0 は連続関数の様々な性質を証明するのに必要十分な体系である．最初に，次の 2 つの基本事実を証明する．

定理 2.15　WKL_0 において，連続関数 $f:[0,1]\to\mathbf{R}$ は一様連続である．

証明　$n\in N$ を任意に固定しておく．$\forall x,y\in[0,1](|x-y|<d\to|f(x)-f(y)|<2^{-n})$ となる $d>0$ の存在を示したい．連続関数 f のコードを F とし，コード i をもつ開区間を (p_i,q_i) と表す．そして，次のような開集合 U を定義する：

$$i\in U\Leftrightarrow \exists j<i((p_i,q_i,p_j,q_j)\in F\wedge q_j-p_j<2^{-n-1}).$$

まず，この集合が $[0,1]$ の被覆になっていることを示す．任意の実数 $x\in[0,1]$ に対し，$x\in\mathrm{dom} f$ だから，$p_{i'}<x<q_{i'}\wedge q_j-p_j<2^{-n-1}$ となる $(p_{i'},q_{i'},p_j,q_j)\in F$ が存在する．さらに，$p_{i'}\leq p_i<x<q_i\leq q_{i'}$ となる i は無限に存在するので，$i>j$ と取れば，$i\in U$ で $p_i<x<q_i$ である．よって，U は $[0,1]$ の開被覆となる．

ここで，ハイネ＝ボレルの定理により，U は有限部分被覆 U' をもつ．そこで，U' に属する区間 (p_i,q_i) の幅 q_i-p_i の最小値を d とおく．この d が一様収束条件を満たすことを示そう．いま，$|x-y|<d$ となる実数 $x,y\in[0,1]$ を任意に選ぶ．すると，x,y をそれぞれに含む 2 つあるいは同一の開区間 $(p_i,q_i),(p_{i'},q_{i'})$ で重なり合うもの，つまり共有点 z を持つものが必ず U' に存在する．U の定義から，$|f(x)-f(z)|<2^{-n-1}$ かつ $|f(y)-f(z)|<2^{-n-1}$ であるから，$|f(x)-f(y)|<2^{-n}$ となり，題意が満たされた．□

定理 2.16　WKL_0 において，連続関数 $f:[0,1]\to\mathbf{R}$ はある点 $x=a$ で最大値 $f(a)$

をとる.

証明 まず，f の値域の上限 M が存在することを示す．前定理の証明において，U は Σ_0^0 式で定義されている．また，与えられた有限個の開区間の集合が $[0,1]$ を覆うかどうかは有限的に決定できる．従って，U の有限部分集合を全部並べておいて，順次 $[0,1]$ の開被覆になるかどうか調べてゆくと，いつかは求める有限部分被覆 U' が得られる．つまり，WKL_0 において，n から U' を取り出す関数は Δ_1^0 式で定義でき(練習問題：なぜか？)，その存在は WKL_0 でいえる．各 $i \in U'$ に対し，$(p_i, q_i, p_{j_i}, q_{j_i}) \in F \wedge q_{j_i} - p_{j_i} < 2^{-n-1}$ となる $j_i < i$ を選んで，$M_n = \max\{q_{j_i} : i \in U'\}$ とおく．すると，$\{M_n\}$はそれ自身実数であり，それが f の値域の上限 M であることは明らか.

あとは，$f(a) = M$ となる点 $x = a$ の存在を言えばよい．以下の証明のために，$M_n = \max\{p_{j_i} : i \in U'\}$とおきなおす．これによって，任意の n について，$M_n \leq M = \{M_n\}$となっている．さて，すべての $x \in [0,1]$ に対し，$f(x) < M$ と仮定してみよう．そして，次のような開集合 V を定義する：

$$i \in V \Leftrightarrow \exists j, n < i\,((p_i, q_i, p_j, q_j) \in F \wedge q_j < M_n).$$

まず，この集合が $[0,1]$ の被覆になっていることを示す．任意の実数 $x \in [0,1]$ に対し，$f(x) < M$ だから，$p_{i'} < x < q_{i'} \wedge p_j \leq f(x) \leq q_j < M_n \leq M$ となる $(p_{i'}, q_{i'}, p_j, q_j) \in F$ および n が存在する．ここで，$p_{i'} \leq p_i < x < q_i \leq q_{i'}$ となる i は無限に存在するので，$i > j, n$ と取れば，$i \in V$ で $p_i < x < q_i$ である．よって，V は $[0,1]$ の開被覆となる.

再びハイネ＝ボレルの定理により，V は有限部分被覆 V' をもつ．そこで，V' に属する区間 (p_i, q_i) の q_i の最大値を M' とおくと，連続関数の値の定義から，M' は値域の上界になる．他方，V' の有限性から，ある n に対して，$M' < M_n \leq M$ となる．これは M が上限であることに矛盾する． □

定理 2.17 次はどれも RCA_0 上で同値になる.

（1） WKL_0

（2） 連続関数 f: $[0,1]\to\mathbf{R}$ は一様連続である

（3） 連続関数 f: $[0,1]\to\mathbf{R}$ は有界である

（4） 有界な連続関数 f: $[0,1]\to\mathbf{R}$ が上限をもつ

（5） 上限をもつ連続関数 f: $[0,1]\to\mathbf{R}$ が最大値をとる

証明 （1）から（2），（3），（4），（5）を導くのは，上の2つの定理による．そこで，（1）を否定して，（2），（3），（4），（5）のそれぞれの反例が得られればよい．

まず，（1）の否定を仮定する．すると，無限道を持たない無限木 $T\subseteq Seq_2$ が存在する．ハイネ＝ボレルの定理の証明でしたように，各 $s\in Seq_2$ に対し，次の2つの有理数 a_s, b_s を定義する：

$$a_s=\sum_{i<leng(s)}\frac{s(i)}{2^{i+1}},$$

$$b_s=a_s+\frac{1}{2^{leng(s)}}.$$

いま，B を T に含まれない極小の2進列全体とし，$s\in B$ に対して，閉区間 $[a_s, b_s]$ を対応させて，その全体を J とおく．すると，各実数 $x\in[0,1]$ は J に含まれるどれか1つの区間の内点であるか，あるいは1つまたは2つの区間の端点になる．このような性質をもつ無限集合 J を**特異閉被覆**と呼ぶ．

この特異閉被覆 J を用いて，（3）の反例を作る．（2）ならば（3）は明らかだから，これは（2）の反例でもある．J に属する各区間 $[a_s, b_s]$ において定義される連続関数 f_s を次のように定義する：

$$f_s(x)=\begin{cases} leng(s)\dfrac{2(x-a_s)}{a_s+b_s} & a_s\leq x\leq (a_s+b_s)/2 \text{ のとき} \\ leng(s)\dfrac{2(b_s-x)}{a_s+b_s} & (a_s+b_s)/2\leq x\leq b_s \text{ のとき} \end{cases}$$

すなわち，f_s は両端点 $x=a_s, b_s$ で0をとり，中点 $x=\dfrac{(a_s+b_s)}{2}$ で $leng(s)$ をとり，

それ以外では端点と中点の値を直線で結んで定義されるものである．そして，これらの関数 f_s をすべてつなぎあわせたものを f とおくと，f は明らかに連続だが，有界ではない．(厳密には連続関数 f のコードの存在も調べる必要があるが，それは読者にまかせる．)

(4)と(5)の反例の作り方も上とほぼ同様である．まず，(5)については，上で f_s の最大値を $leng(s)$ としたのを，$1-2^{-leng(s)}$ に置き換えれば，結合した関数 f は明らかに1を上限とする．しかし，関数 f が最大値1を取りうるような点は被覆 J のどの区間にも存在しないので，$[0,1]$ にも存在しない．

(4)の反例には，簡単のため次節の結果（定理 4.5）を用いる．WKL_0 を否定すれば，ACA_0 も否定されるので，有界な増加有理数列 $\{c_n\}$ で，上限を持たないものが存在する．あとは，上の f_s の最大値を $c_{leng(s)}$ として以下同様である． □

問題（やや難）　上の定理の(4)，(5)において，“連続関数”を“一様連続な関数”に置き換えることができる．ヒント：(1)を否定してそれらの反例を作る場合，さらに一様連続性を満たすようにする必要がある．3進集合に対する特異閉被覆を利用するとよい．

さて，これまでは1変数の実関数のみを議論してきたが，もっと一般的な空間における多変数関数を扱うことができる．このことを簡単にみてみよう．少し抽象的な話なので，興味がない方や難しいと思われる方は定理 2.18 までスキップしてよい．

集合 $A \subseteq \mathbf{N}$ に（擬）距離 $d: A \times A \to \mathbf{R}$ が定義されているとする．すなわち，d は次を満たす関数である：

(1)　$d(a,a)=0$,

(2)　$d(a,b)=d(b,a)$,

(3)　$d(a,b)+d(b,c) \geq d(a,c)$.

このとき，$\forall n \forall i\, d(a_n, a_{n+i}) \leq 2^{-n}$ を満たす A の列 $\{a_n\}$ を $\hat{A}$ の点といい，$\{a_n\} \in \hat{A}$ と書く．例えば，$A=\mathbf{Q}, d(p,q)=|p-q|$ とすると，$\hat{A}$ は $\mathbf{R}$ に他ならない．ま

た，$A=\mathbf{Q}^2, d((p,q),(p',q'))=\sqrt{(p-p')^2+(q-q')^2}$ としたとき，$\hat{A}$ は $\mathbf{R}^2$ である．一般に，$\hat{A}$ の 2 点 $x=\{a_n\}, y=\{b_n\}$ に対して，それらの距離を

$$d(x,y)=\{c_{nn}\} \quad \text{但し}\{c_{nk}: k\in\mathbf{N}\}=d(a_{n+3}, b_{n+3})$$

と定義すれば，$\hat{A}$ 自体も**距離空間**と考えられる．

いま，距離空間 $\hat{A}$ において，$a\in A$ を中心とし有理半径 $r>0$ をもつ**開球**$B_r(a)$ をペア $(a,r)\in A\times\mathbf{Q}^+ (\subseteq\mathbf{N})$ でコード化する．**開集合**は，開球のコードの集合として定義する．距離空間 $\hat{A}$ から距離空間 $\hat{B}$ への**連続関数** f のコード F は，$A\times\mathbf{Q}^+\times B\times\mathbf{Q}^+$ の部分集合であり，$\mathbf{R}$ から $\mathbf{R}$ への連続関数と同様な条件を満たすものとする．すなわち，$(a,r,b,s)\in F$ が，$x\in B_r(a)\rightarrow f(x)\in\overline{B_s(b)}$（閉球）を意味するように定める．

さて，n-変数連続関数についての極めて応用の広い定理が，“どんな連続関数 $f:[0,1]^n\rightarrow[0,1]^n$ も不動点を持つ” という**ブラウワーの定理**である．ここで，f の不動点とは $f(x)=x$ となる点 x である．$n=1$ の場合は中間値の定理から直ちに導けるので RCA_0 で成り立つが，$n>1$ の場合は RCA_0 では証明できない．

定理 2.18　ブラウワーの不動点定理は RCA_0 上で WKL_0 と同値である．

証明　ブラウワーの不動点定理に対しては，いろいろな証明方法が知られているが，それらの多くに共通する点は，関数 f の一様連続性を用いて有限の組合せ問題（例：スペルナの定理）に還元することである．先に示した定理と同様，n-変数関数の場合も一様連続性が WKL_0 で証明できるので，その他は不動点定理の普通の証明をそのまま WKL_0 で行えばよい．（詳細は練習問題としよう．）

逆を示すために，WKL_0を否定して，不動点を持たない連続関数$h:[0,1]^2\rightarrow[0,1]^2$ を作る．まず，定理 2.17 の証明のように，WKL_0 の否定から $[0,1]$ の特異閉被覆 J が存在する．これを使って，$[0,1]^2$ から $[0,1]^2$ の境界 B への**牽縮射像 retraction**（B 上で不変な連続関数）f を構成する．そのような f が存在すれば，B を90° 回転させる操作 g をその後に付け加えることで，不動点を持たない連続関数 $h(x)$

$=g(f(x))$ が得られる．

それでは，牽縮射像 f の作り方を示そう．最初に，$J=\{I_i : i\in \mathbf{N}\}$ とおき，さらに I_0 の左端が 0，I_1 の右端が 1 であるとする．そして，$A_k=\bigcup_{i\leq k}(I_i\times I_k\cup I_k\times I_i)$ とおく．すると，$[0,1]^2=\bigcup_k A_k$ である．いま，関数 f が $\bigcup_{i<k}A_i$ の上で定義されているとして，A_k の上の定義を与えよう．

A_k を連結な部分に分け，それらを $P_0, P_1, \ldots, P_m$ とする．このとき，$P_l(l\leq m)$ の辺が，$\bigcup_{i<k}A_i$ または $[0,1]^2$ の境界 B に接していれば，その辺の移る先はすでに定まっていることになる．しかし，A_k の形から考えて $\bigcup_{i<k}A_i$ に接しない P_l の辺は少なくとも 2 つあり，また $[0,1]^2$ の 4 隅（$k=0,1$ の場合）を除いて境界 B に接する辺を 2 つ以上持つ連結部分 P_l はあり得ないから，すべての P_l は拘束されていない辺を 1 つ以上持つことがわかる．

そこで，各 P_l において，1 つの自由な辺を除いた残りの辺全体を D_l とし，P_l から D_l への牽縮射像を作る．それから，所与の条件のもとで，D_l を境界 B へ連続に移せばよい．このとき，D_l のなかに含まれる自由な辺は，拘束されている辺の射影と連続性を保つようにして適当に移せばよい．もし，D の辺がすべて自由なら，D は境界 B のどこに移してもいい．こうして，各 P_l から境界 B の射像が定まり，これらを合わせたものが射像 f の A_k 上の定義である．

こうして定義された f が $[0,1]^2$ から $[0,1]^2$ の境界 B への牽縮射像であることは明らかである．よって，WKL_0 を否定して，不動点定理の反例が得られた．□

上の証明では，作られた f（および h）が連続関数のコードを持つことは示していない．そのためには，最初に連続関数が何かを正確に定義しておく必要があったし，f の構造も細部まできちんと記述する必要がある．気になる人はとことん考えてみてほしい．その人たちのために，少し考えるヒントを出しておく．まず $F=\{(U_0, U_1) : U_i$ は $\mathbf{R}^2$ の開球で，$f(U_0)\subseteq \bar{U}_1\}$ となればよいが，このままでは右辺が複雑すぎてその存在はいえない．しかし，十分大きな k について，U_0 が $\bigcup_{i<k}A_i$ に含まれれば（あるいは含まれる部分だけを考えてよければ），$f(U_0)\subseteq \bar{U}_1$ は簡単

な Δ^0_1 関係で表すことが出来るだろう．U_0 をこのように小さくとることはコードの制約にはならない．さらに k を U_0 のコード以下にとるトリックを用いることで，コード全体を Δ^0_1 で書くことができる．

さて，ブラウワーの定理を無限次元空間 $[0,1]^{\mathbf{N}}(\subseteq\mathbf{R}^{\mathbf{N}})$ に拡張したものが**チコノフ＝シャウダーの不動点定理**で，やはり WKL_0 で証明できる．これを用いて常微分方程式の局所解の存在に関する**コーシー＝ペアノの定理**も WKL_0 で証明され，またその逆もいえることがわかっている．付言すると，コーシー＝ペアノの定理の普通の証明では，まず解の折れ線近似列を作り，アルツェラ＝アスコリの補題を用いて求める解の存在をいうが，アルツェラ＝アスコリの補題がWKL_0で証明できないので，この証明は WKL_0 に乗らない．WKL_0 における様々な不動点定理の証明とその応用は，塩路と田中によって研究されている．

ここで，WKL_0 と同値になる命題をまとめておこう．

定理群 2　次のどの定理も RCA_0 上で WKL_0 と同値になる．

（1）　Heine-Borel の被覆定理

（2）　連続関数 $f\colon[0,1]\to\mathbf{R}$ は最大値をもつ

（3）　連続関数 $f\colon[0,1]\to\mathbf{R}$ は一様連続である

（4）　ブラウワーの不動点定理

（5）　微分方程式についてのコーシー＝ペアノの定理

（6）　ワイエルシュトラスの多項式近似定理

（7）　可分バナッハ空間のハーン＝バナッハの定理

（8）　可算な可換環は素イデアルをもつ

（9）　ゲーデル＝ヘンキンの完全性定理

WKL_0 で証明できる定理の数は，RCA_0 のそれより飛躍的に多くなった．また，RCA_0 ですでに証明できる定理に対しても WKL_0 で証明した方が自然で楽になることがかなりある．代表的な例は，代数学の基本定理（複素係数の多項式は必ず複素解を持つ）であろう．この定理の普通の証明は WKL_0 における証明であり，

RCA_0 の証明は解を求めるアルゴリズムまで要求するのでずっと厄介である．もちろん，RCA_0 での証明にはそれなりに多く情報が含まれているから，WKL_0 での簡単な証明より価値が低いというわけでない．

このような状況にもかかわらず，算術的命題に関しては，WKL_0 と RCA_0 の証明能力は変わらないというハーリントンの定理がある（3.3 節参照）．さらに，WKL_0 は（従って RCA_0 も）1階算術 PRA の Π^0_2－保存的拡大になるという H. フリードマンの定理もある（3.4 節参照）．ここで，PRA は Primitive Recusive Arithmetic の頭文字をとったもので，すべての原始再帰的関数（の定義）に対して関数記号をもち，それらの定義式を公理にもつ体系である．帰納法に関する公理（もしくは規則）をどう与えるかによって，PRA にはいくつか形式化のバリエーションがあるが，量化記号を含まない形でも公理化でき，ヒルベルトの「有限の立場」の形式化といわれている．WKL_0 と PRA は同じ Π^0_2 定理をもっているので，WKL_0 は無矛盾性に関して「有限の立場」と同程度の透明性をもっているといえる．

ここで，「ヒルベルトの計画」について，おさらいしておこう．ヒルベルト自身，時代と共に少なからず考えを変えているようなので，これこそが彼の計画であるというのは難しいと思うが，1910年代から20年代にかけて直観主義者のブラウワーとの論争において彼の思想は明確な言葉で表現されている．当時，数学界のリーダーであったヒルベルトは，これまで人類が何千年もかけて築き上げてきた数学の世界が，ブラウワーらの主張の如く単なる虚構であるとは考えられなかった．ブラウワーら直観主義者が数学における非構成的な手法を攻撃してきたのに対し，彼は猛然と反撥し，非構成的な証明法を擁護する数学の哲学を打ち立てた．彼の主張は，数学はその内容がいかに非構成的でも，きちんとした証明を与えれば証明自体は有限の文字列に過ぎないから，いわゆる「有限の立場」でその正当性が確かめられるというものである．

数学全体が議論できるような大きな体系 T（例：集合論 ZF＋AC）に対しても，その証明可能性はある文字列が別の文字列に変形できるかどうかの問題として考え

られる．だから，例えばフェルマーの定理（$\forall n>2\,\forall x,y,z(x^n+y^n\neq z^n)$）のように集合の存在を何も主張しない命題に対しては，もし T での証明があるなら，その証明の構造をじっと眺めれば，「有限の立場」での証明が抽出できるはずだと彼は考えた．

いま，大きな体系 T に対し，その体系の記号操作ができる程度の小さな体系（例．PRA）を t として，われわれは次の図式をヒルベルトの計画 HP と呼ぶことにする：

$$\text{任意の } \Pi^0_1 \text{ 命題 } \pi \text{ に対し，} T\vdash\pi \text{ ならば } t\vdash\pi.$$

以下では，T も t も少なくとも PRA を含むとしておく．

補題 2.19　任意の Π^0_1 命題 φ に対し，$T\vdash\varphi$ ならば $t+\mathrm{Con}(T)\vdash\varphi$.

証明　$\varphi=\forall n\,\theta(n)$（$\theta(n)$ は Σ^0_0）とし，$T\vdash\varphi$ を仮定する．$T\vdash\varphi$ から $t\vdash\mathrm{Bew_T}(\ulcorner\varphi\urcorner)$ は容易にいえる．他方，$t\vdash\neg\theta(n)\to\mathrm{Bew_T}(\ulcorner\neg\theta(n)\urcorner)$，すなわち $t\vdash\neg\theta(n)\to\mathrm{Bew_T}(\ulcorner\neg\varphi\urcorner)$ なので，$t\vdash\neg\theta(n)\to\neg\mathrm{Con}(T)$．従って，$t+\mathrm{Con}(T)\vdash\theta(n)$ だから，$t+\mathrm{Con}(T)\vdash\varphi$ となる．（補題 1.19，1.20，定理 1.21 を参照）　□

この定理により，$t\vdash\mathrm{Con}(T)$ ならば，HP がいえることがわかる．そこで，ヒルベルトは $\mathrm{Con}(T)$ を有限の立場で証明することを彼の具体的な目標にした．しかし，結果的には，T においてさえ $\mathrm{Con}(T)$ は証明出来ないし，また t においては $\mathrm{Con}(t)$ も証明出来ないことが，ゲーデルの不完全性定理によって示された．他方，上でも述べたように，$T=\mathrm{WKL_0}, t=\mathrm{PRA}$ に対しては HP が成り立っており，$\mathrm{WKL_0}$ で展開される数学の豊かさを見るとき，「ヒルベルトの計画」は部分的に実現されたと言っていいだろう．このような見解に異議を唱える人がいたとしても，ある Π^0_1 命題が弱ケーニヒの補題のような非構成的な仮定を用いて証明されるとき，その非構成的な部分を構成的なものに書き換える手続きがあるという結論の重要性は疑えないであろう．

2.4　ACA_0 とラムゼイの定理

公理系 ACA_0 は RCA_0 に次の公理を加えたものである：

$$(\Pi^1_0\text{-CA}):\ \exists X\,\forall n\,(n\in X \leftrightarrow \varphi(n)).$$

ここで，$\varphi(n)$ は算術式（Π^1_0 式）で，X を自由変数として持たないものとする．(Π^1_0-CA) は**算術的内包公理** (**arithmetical comprehention axiom**) とも呼ばれる．このとき，$\varphi(n)$ を Π^0_1 式または Σ^0_1 式だけに制限しても体系の強さは変らないことをあとで示す．また，Σ^0_1-帰納法を Π^1_0-帰納法に強めても，あるいは反対に

$$\text{帰納法公理}:\ \forall X(0\in X\wedge \forall n\,(n\in X\rightarrow n+1\in X)\rightarrow \forall n\ n\in X)$$

のような形に制限しても同じ体系になる．

まず，帰納法に関する事実を示しておく．

定理 2.20　$ACA_0-\Sigma^0_1$-帰納法＋帰納法公理$\vdash \Pi^1_0$-帰納法.

証明　$\varphi(n)$ を任意の算術式とする．いま，$\varphi(0)\wedge\forall n(\varphi(n)\rightarrow\varphi(n+1))$ および $\forall n(n\in X\leftrightarrow\varphi(n))$を仮定すると，簡単な論理計算で $0\in X\wedge\forall n(n\in X\rightarrow n+1\in X)$ が導ける．これに帰納法公理を適用して $\forall n n\in X$，従って $\forall n\varphi(n)$ を得る．以上を，演繹定理を使ってまとめれば，

$$[\{\varphi(0)\wedge\forall n(\varphi(n)\rightarrow\varphi(n+1))\}\wedge\forall n(n\in X\leftrightarrow\varphi(n))]\rightarrow\forall n\varphi(n).$$

よって，

$$[\{\varphi(0)\wedge\forall n(\varphi(n)\rightarrow\varphi(n+1))\}\wedge\exists X\,\forall n(n\in X\leftrightarrow\varphi(n))]\rightarrow\forall n\varphi(n).$$

いま，$\exists X\forall n(n\in X\leftrightarrow\varphi(n))$ は (Π^1_0-CA) の一例に過ぎないから，結局

$$ACA_0-\Sigma^0_1\text{-帰納法}+\text{帰納法公理}\vdash\{\varphi(0)\wedge\forall n(\varphi(n)\rightarrow\varphi(n+1))\}\rightarrow\forall n\varphi(n).\quad\square$$

定理 2.21　ACA_0 はペアノの 1 階算術 PA の保存的拡大 (conservative extension) になっている．つまり，PA の定理は ACA_0 で証明でき，ACA_0 で証明でき

る1階算術の命題はPAの定理になる.

証明 PAの定理がすべてACA_0で証明できることは，上の補題を使って明らか．逆を示すために，σを1階算術の命題で，$PA \nvdash \sigma$とする．完全性定理により，PAのモデル$M = (M, +, \cdot, 0, 1, <)$で，$M \vDash \neg\sigma$が存在する．いま，$\varphi(x, y_1, \ldots, y_k)$を1階算術の論理式とし，$b_1, \ldots, b_k \in M$に対して，

$$A_{\varphi, b_1, \ldots, b_k} = \{a \in M : M \vDash \varphi(a, b_1, \ldots, b_k)\}$$

と定義し，

$$S = \{A_{\varphi, b_1, \ldots, b_k} : \varphi \text{ は1階算術の論理式，} b_1, \ldots, b_k \in M\}$$

とおく．すると，以下に示すように，$(M, S) = (M, S, +, \cdot, 0, 1, <)$は$ACA_0$のモデルになり，かつ$\sigma$は集合変数を含まないから$(M, S) \vDash \neg\sigma$．従って，$ACA_0 + \neg\sigma$は無矛盾，すなわち$ACA_0 \nvdash \sigma$である．

さて，$\psi(x, y_1, \ldots, y_k, Y_1, \ldots, Y_l)$を任意の算術的（$\Pi^1_0$）論理式とする．いま，$b_1, \ldots, b_k \in M, A_{\varphi_1, \bar{c}}, \ldots, A_{\varphi_l, \bar{c}} \in S$として，$\psi(x, b_1, \ldots, b_k, A_{\varphi_1, \bar{c}}, \cdots, A_{\varphi_l, \bar{c}})$に含まれる$t \in A_{\varphi_i, \bar{c}}$の部分を$\varphi_i(t, \bar{c})$で置き換えた式を$\psi'(x, b_1, \ldots, b_k, \bar{c})$とすれば，$(M, S)$上で

$$\psi(x, b_1, \ldots, b_k, A_{\varphi_1, \bar{c}}, \cdots, A_{\varphi_l, \bar{c}}) \leftrightarrow \psi'(x, b_1, \ldots, b_k, \bar{c})$$

がいえる．従って，

$$\{a \in M : (M, S) \vDash \psi(a, b_1, \ldots, b_k, A_{\varphi_1, \bar{c}}, \cdots, A_{\varphi_l, \bar{c}})\} \in S.$$

すなわち，(M, S)は算術的内包公理を満たし，ACA_0のモデルになる．□

問題 RCA_0が$I\Sigma_1$の保存的拡大になることを上と同様の方法で示せ．但し，$I\Sigma_1$はペアノ算術PAにおける帰納法をΣ_1式に制限した体系である．このことと次章のハーリントンの定理によりWKL_0も$I\Sigma_1$の保存的拡大になる．

定理 2.22 ACA_0はWKL_0の真の拡大である．

証明の概略 WKL_0がACA_0に含まれることは，Σ^0_1−内包公理からΣ^0_1−分離

原理が直ちに導けるので明らか．WKL_0 と ACA_0 が異なることは，ACA_0 で WKL_0 のモデルを作るか，あるいは証明論的に WKL_0 すなわち $I\sum_1$ の無矛盾性を証明すればよい．（拙編著「数学基礎論講義」パートCに述べられているように，$I\sum_1$ と PA における provably recursive function の違いを用いてもよい．）　□

定理 2.23　RCA_0 において以下は同値である：

（1）　ACA_0,

（2）　(Σ^0_1-CA),

（3）　任意の 1-1 関数 $f:\mathbf{N}\to\mathbf{N}$ の値域が存在する．

証明　（1）⇒（2）は明らか．（2）⇒（3）も，値域が Σ^0_1 で表せること（$n\in range(f)\leftrightarrow\exists m f(m)=n$）から明らか．

（3）⇒（2）は，補題 2.5 による．

（2）⇒（1）を示す．$(\Sigma^0_1-CA)\to(\Sigma^0_k-CA)$ を k についての帰納法で証明する．$k\leq 1$ のとき明らか．$\varphi(n)$ を任意の Σ^0_{k+1} 式とし，Σ^0_k 式 $\theta(m,n)$ を使って，$\varphi(n)\leftrightarrow\exists m\neg\theta(m,n)$ と表す．(Σ^0_k-CA) により，

$$Y=\{(m,n):\theta(m,n)\}$$

が存在する．そして，(Σ^0_1-CA) によって，

$$X=\{n:\exists m\neg(m,n)\in Y\}$$

も存在し，明らかに，

$$n\in X\leftrightarrow\varphi(n)$$

である．　□

定理 2.24　次のどの命題も RCA_0 上で同値である：

（1）　ACA_0

（2）　ボルツァノ＝ワイエルシュトラスの定理：有界な実数列は収束部分列をもつ

（3） コーシー列は収束する

（4） 有界な実数列は上限をもつ

（5） 単調収束定理：有界な増加列は収束する

証明 （1）⇒（2），（3），（4），（5）は普通の数学と変らない．（練習問題：これを示せ．もし縮小区間列を使うなら，各区間に数列の点が1つ以上入る，あるいは無限個入るなどの条件が算術的に表現できることに注意せよ．）また，（5）は（2），（3），（4）のどれからでも直ちに導けるので，あとは（5）から（1）を示せばよい．

（5）を仮定する．上の定理を用いるため，$f:\mathrm{N}\to\mathrm{N}$ を任意の 1-1 関数とする．

$$c_n=\sum_{i=0}^{n}2^{-f(i)}$$

によって，有界な増加有理数列$\{c_n\}$を定義すれば，単調収束定理から

$$c=\lim_{n\to\infty}c_n=\sum_{i=0}^{\infty}2^{-f(i)}$$

が存在する．すると，任意の n について，

$$n\in range(f)\leftrightarrow \exists m f(m)=n\leftrightarrow \forall k(|c_k-c|<2^{-n}\to \exists m\leq k(f(m)=n)$$

となることがわかる．従って，（$\Delta_1^0-\mathrm{CA}$）により $range(f)$ が存在し，上の定理により ACA_0 が導かれた． □

問題 上の定理において，（5）⇒（2）をラムゼイの定理（後述）を使って証明せよ．ヒント：実数列$\{x_n\}$が与えられた時，$\{(m,n)\}=[\mathrm{N}]^2$ を $x_m\leq x_n$ か $x_m>x_n$ かで色分けせよ．

次に，一般のケーニヒの補題について述べよう．長さ n の自然数列の集合，つまり定義域$\{i\in\mathrm{N}:i<n\}$をもつ関数（のコード）の集合を Seq で表す．Seq の部分集合 T で，その各要素のすべての始切片が再び T の要素となるようなものを**木** (**tree**) と呼ぶ．各要素 $s\in T$ が高々有限個の子 $s^\frown m\in T(m\in\mathrm{N})$ しか持たない木 T を**有限分岐木**という．また，木 T の部分木で，枝別れのないものを T の**道** (**path**) という．

ケーニヒの補題は「無限個の点を含む有限分岐木は必ず無限長の道を持つ」という主張である．もちろん，2進列だけからなる木は有限分岐木であるから，弱ケーニヒの補題はケーニヒの補題の特殊な場合である．しかし，これから示すようにケーニヒの補題は ACA_0 と同値になるので，弱ケーニヒの補題からケーニヒの補題を導くことはできない．

定理 2.25　RCA_0 上で以下は同値になる：

（1）　ACA_0

（2）　ケーニヒの補題

（3）　各要素 $s \in T$ が高々2個の子 $s^\frown m \in T (m \in \mathbf{N})$ しか持たない無限木 T は，無限長の道を持つ．

注：上の（3）で，子 $s^\frown m \in T$ に対する m の大きさが有界でないことが重要である．木全体で m の大きさを有界にすれば，弱ケーニヒの補題と同等な命題になる．

証明　（1）⇒（2）．無限の有限分岐木 T が与えられたとき，無限個の子孫 $t \supseteq s$ をもつような点 $s \in T$ を集め，T' とおく（(Π^1_0－CA) による）．そして，原始再帰法を用いて T' の道 g を次のように定めればよい：

$$g(0) = \text{空列}, \quad g(n+1) = g(n)^\frown m \text{ ただし } m \text{ は } g(n)^\frown m \in T' \text{ となる最小の数.}$$

（2）⇒（3）は自明である．（3）⇒（1）を示すために，（3）を仮定して，定理 2.23 の（3），つまり任意の 1-1 関数 $f: \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ を与えてその値域が存在することをいう．木 T を以下のように定義する：　$s \in T \Leftrightarrow$

（a）　$\forall m, n < leng(s)\,(f(m) = n \leftrightarrow s(n) = m+1)$,

（b）　$\forall n < leng(s)\,(s(n) > 0 \to f(s(n)-1) = n)$.

すると，各要素 $s \in T$ は高々2つの子 $s^\frown k \in T$ しか持たない．すなわち，（b）より，$k=0$ か，$f(m) = leng(s)$ で $k = m+1$ かである．

次に，木 T が無限集合になることを示す．そのためには，任意の $k \in \mathbf{N}$ に対し，$leng(s) = k$ となる列 $s \in T$ の存在をいえばよい．まず，有界 (Σ^0_1－CA) により，f

の値域の k より小さい部分 $Y=\{n\in range(f): n<k\}$が存在する．そして，長さ k の列 s を次のように定義する：$n<k$ に対して，

$$s(n)=\begin{cases}0 & n\notin Y \text{ のとき}\\ m+1 & n\in Y\wedge f(m)=n \text{ のとき}\end{cases}$$

このとき，$s\in T$ は明らかである．

さて，仮定(3)より，木 T は無限の道 g をもつ．T の定義（a）によって，

$$\forall m,n(f(m)=n\leftrightarrow g(n)=m+1).$$

そこで，$X=\{n: g(n)>0\}$とおけば，$X=range(f)$ である．□

最後に，ラムゼイの定理について述べる．集合 $X\subseteq\mathbf{N}$ の k 個の要素を大きさの順に並べた列 $(m_1,\ldots,m_k)$ の全体を $[X]^k$ とする．k 要素についての**ラムゼイの定理** $RT(k)$ は次のような主張である：

$$\forall l\in\mathbf{N}\,\forall f:[\mathbf{N}]^k\to\{0,1,\cdots,l-1\}\,\exists X\subseteq\mathbf{N}(X \text{ は無限集合}\wedge f \text{ は } [X]^k \text{ 上で定数}).$$

例えば，$RT(2)$はこう解釈できる．自然数のペア$\{m,n\}$全体を l 色で色分けするなら，必ず無限集合 X が存在して，X の要素のペアはすべて同じ色になる．このような条件を満たす X を分割 f に対する**等質** (homogeneous) 集合と呼ぶ．

定理 2.26　ACA_0 では，$RT(0)$ 及び $\forall k(RT(k)\to RT(k+1))$ が証明可能である．

証明　$RT(0)$ は自明である．そこで，$RT(k)$ を仮定し，$RT(k+1)$ を示す．いま，$f:[\mathbf{N}]^{k+1}\to\{0,1,\cdots,l-1\}$を任意に与える．この f に対する等質集合 X を作るのに，ケーニヒの補題を用いる．そのためにまず，次のような木 T を定義する：$t\in T\Leftrightarrow$ 任意の $n<leng(t)$ について以下が成り立つ，

（1）　$\max\{t(m): m<n\}<t(n)$,

（2）　任意の $m_1<\cdots<m_k<m<n$ に対し，

$$f(t(m_1),\cdots,t(m_k),m)=f(t(m_1),\cdots,t(m_k),t(n)),$$

(3)　$\max\{t(m):m<n\}<j<t(n)$ ならば，$m_1<\cdots<m_k<n$ が存在して，

$$f(t(m_1),\cdots,t(m_k),j)\neq f(t(m_1),\cdots,t(m_k),t(n)).$$

この木 T は，**エルデシュ＝ラドーの木**と呼ばれる．

まず，木 T が有限分岐木であることを示そう．$t\in T$ を任意に選び，その長さを n とする．いま，$j>t(n-1)$ に対し，

$$\hat{f}_j(m_1,\ldots,m_k)=f(t(m_1),\cdots,t(m_k),j)$$

で，関数 $\hat{f}_j:[0,\cdots,n-1]^k\to\{0,\cdots,l-1\}$ を定義する．すると，$j\neq j'$ で $t^\frown j\in T$ かつ $t^\frown j'\in T$ ならば，$\hat{f}_j\neq\hat{f}_{j'}$ が次のようにいえる．$t(n-1)<j<j'$ の場合，$t^\frown j'\in T$ に対して木の条件(3)を当てはめれば（$t(n)=j'$ と考えよ），$\hat{f}_j\neq\hat{f}_{j'}$ を得る．$t(n-1)<j'<j$ の場合も同様である．さて，$[0,\cdots,n-1]^k$ から $\{0,\cdots,l-1\}$ への関数は有限個しかない．従って，$t^\frown j\in T$ となる j も有限個である．

次に，T が無限集合になることを示す．そのためには，任意の $j\in\mathbf{N}$ に対して，それを含む列 s（すなわち，ある n について $s(n)=j$）が T の中に存在することをいえばよい．いま，j を固定し，次の条件を満たす最長（あるいは極大長）の T の要素を t とする：

(1°)　$\max\{t(m):m<leng(t)\}<j$,

(2°)　任意の $m_1<\cdots<m_k<m<leng(t)$ に対し，

$$f(t(m_1),\cdots,t(m_k),m)=f(t(m_1),\cdots,t(m_k),j).$$

空列は上の条件(1°),(2°)を満たし，また条件(1°)に適う T の要素は高々 $j!$ 個であるから，2条件を満たす最長の列 t は明らかに存在する．この列 t の長さを n とする．そして，$t'=t^\frown j$ とおくと，$t'\in T$ である．実際，t' が木の条件(1),(2)を満たすことは，それぞれ上の条件(1°),(2°)から明らか．いま，条件(3)が成り立たないとすると，$\max\{t(m):m<n\}<j'<j$ となる j' が存在し，任意の $m_1<\cdots<m_k<n$ に対して，

$$f(t(m_1), \cdots, t(m_k), j') = f(t(m_1), \cdots, t(m_k), j)$$

となる．j' をそのような最小なものとすれば，$t^\frown j'$ は木 T に属する．また，このとき，$t^\frown j'$ が条件 (1°), (2°) を満たすことも明らかであるから，これは t の最長性に反する．よって，T は無限集合である．

以上によって，エルデシュ＝ラドーの木 T は無限の有限分岐木となり，ケーニヒの補題により無限の道 g をもつ．まず，条件(1)より，g は単調増加関数であること $(m<n \to g(m)<g(n))$ に注意しておく．いま，関数 $\hat{f}: \mathbf{N}^k \to \{0, \cdots, l-1\}$ を次のように定義する：

$$\hat{f}(m_1, \ldots, m_k) = f(g(m_1), \cdots, g(m_k), g(m)),$$

ただし，$m_1< \cdots <m_k<m$ である．この定義が，m の選び方によらないことは，条件(2)で保証される．ここで，仮定 $RT(k)$ を用いて，$\hat{f}$ に対する無限等質集合を X' とする．最後に，$X=\{g(m): m \in X'\}$ とおけば，これが f に対する無限等質集合であることは明らか．□

$RT(k)$ は Π^1_2 式だから，上の定理から $\forall k RT(k)$ を導くことは ACA_0 の帰納法ではできない．パリスとハーリントンは，$\forall k RT(k)$ を 1 階算術の言葉で巧妙に表現した命題 PH を作り，PH が PA から独立であることを証明した．

補題 2.27　RCA_0 において，$RT(3)$ から ACA_0 が導ける．

証明　$RT(3)$ を仮定する．定理 2.23 により，(Σ^0_1－CA) を証明すればよい．任意の Σ^0_1 式 $\varphi(m)$ を選び，Σ^0_0 式 $\theta(m,n)$ を使って，$\varphi(m) \leftrightarrow \exists n \theta(m,n)$ と表す．いま，関数 $f: \mathbf{N}^3 \to \{0,1\}$ を次のように定義する：

$$f(a,b,c) = \begin{cases} 1 & \forall m<a(\exists n<c\theta(m,n) \to \exists n<b\theta(m,n)) \text{のとき} \\ 0 & \text{そうでないとき} \end{cases}$$

この定義は Σ^0_0 であり，RCA_0 でも関数 f は存在する．

さて，$RT(3)$ により，f に対する無限等質集合 X が存在する．このとき，$[X]^3$

における f の値は常に1か常に0であるが，後者にならないことを背理法で示そう．集合 X から任意の元 a を選び，さらにそれより大きな X の元を $a+2$ 個選んで $a<b_0<b_1<\cdots<b_{a+1}$ とする．各 $i<a+1$ に対し，もし $f(a, b_i, b_{i+1})=0$ ならば，$\exists n<b_{i+1}\theta(m,n)$ かつ $\neg\exists n<b_i\theta(m,n)$ となる $m<a$ が存在するので，その最小なものを選んで m_{i+1} としよう．明らかに，$i\neq j$ ならば $m_i\neq m_j$ である．しかし，a より小さい数は a 個しかないから，$m_1, \ldots, m_{a+1}$ をすべて異なるようにはとれない．すなわち，f が常に値 0 をとることは出来ない．

以上により，任意の $(a,b,c)\in[X]^3$ に対し，$\forall m<a(\exists n<c\theta(m,n)\to\exists n<b\theta(m,n))$ である．ここで，c はいくらでも大きくとれるので，結局 $\forall m<a(\exists n\theta(m,n)\to\exists n<b\theta(m,n))$ になる．従って，

$$\exists n\theta(m,n)\leftrightarrow\forall a\forall b((a\in X\wedge b\in X\wedge m<a<b)\to\exists n<b\theta(m,n))$$

となり，(Δ^0_1−CA) より，$\forall m(m\in Y\leftrightarrow\varphi(m))$ となる集合 Y が存在する．□

定理 2.28 任意の標準自然数 $k\geq 3$ に対し，$RT(k)$ と ACA_0 は RCA_0 において同値である．

これは，定理 2.26 と補題 2.27 から直ちに導かれる．$RT(2)$ が ACA_0 と同値になるかどうかは難問であり「2–3 問題」などと呼ばれていたが，最近 Seetapun らによって同値にならないことが示された．

まとめとして，ACA_0 と同値になる主要命題をリストアップしておこう．

定理群 3 次のどの定理も RCA_0 上で ACA_0 と同値になる：

(1) ボルツァノ＝ワイエルシュトラスの定理

(2) コーシー列は収束する

(3) アルツェラ＝アスコリの補題

(4) 可算ベクトル空間は基底をもつ

(5) 加算な可換環は極大イデアルをもつ

(6) 有限分岐木に関する一般のケーニヒの補題

（7） Ramsey の定理 $R(k), k \geq 3$

2.5 ATR_0, Π^1_1－CA_0, その他

逆数学において重要な残り 2 つの体系 ATR_0 と Π^1_1－CA_0 について説明しよう．$\varphi(n, X)$を任意の算術的論理式，A を任意の集合として，$A_0=A, A_{i+1}=\{n : \varphi(n, A_i)\}$によって集合列 $A_0, A_1, A_2, \ldots$ を定義する．さらに $A_\omega=\{2^i\cdot 3^n : n\in A_i\}$とおき，$A_{\omega+i+1}=\{n : \varphi(n, A_{\omega+i})\}$によって集合列 $A_\omega, A_{\omega+1}, A_{\omega+2}, \ldots$ を作る．このような操作を任意の可算順序数まで繰り返せるという主張が算術的超限再帰 (arithmetical transfinite recursion) の公理であり，これを RCA_0 に加えた体系を ATR_0 と呼ぶ．

この公理をもう少し厳密に表現すると，任意の集合 A と任意の整列順序 R に対し，次の条件を満たす集合 H が存在することになる：

（i） b が R における最小元のとき，

$$(H)_b=A,$$

（ii） b が R に関して a の次者 (successor) であるとき，

$$\forall n(n\in (H)_b \leftrightarrow \varphi(n, (H)_a)),$$

（iii） b が R において極限になるとき，b より小さなすべての a について，

$$\forall n(n\in ((H)_b)_a \leftrightarrow n\in (H)_a),$$

ただし，$(A)_a=\{n : 2^a\cdot 3^n\in A\}$である．

体系 Π^1_1－CA_0 は，その名の通り，Π^1_1 式で定義されるすべての集合の存在を主張する Π^1_1－内包公理 (Π^1_1－CA) を RCA_0 に加えたものである．

これら 2 つの体系と同値になるような自然な命題で，大学初年級で馴染みのあるものを探すのは難しい．ここでは，現代の記述集合論における 2 つの重要な概念を紹介し，それらに関する定理と 2 つの体系の関係を述べるに留める．

最初は「無限ゲーム」に関するものである．2人のプレイヤーⅠ，Ⅱが交互に自然数を選んで行く，

$$\begin{array}{lccccccc} \mathrm{I} & n_0 & & n_2 & & n_4 & & \cdots \\ \mathrm{II} & & n_1 & & n_3 & & n_5 & \cdots \end{array}$$

こうして作られる無限列 $n_0^\frown n_1^\frown n_2^\frown n_3^\frown\cdots$ が予め与えられた集合 $G\subseteq\mathbf{N}^\mathbf{N}$ に入っていれば，プレイヤーⅠの勝ち，そうでなければⅡの勝ちと決める．そうすると，最初に G が与えられた段階で，どちらかのプレイヤーがうまくプレイすれば必ず勝てると考えるのは自然なことであろう．このとき，G は**決定性**をもつという．しかし，G の複雑さによって，その決定性は普通の集合論（ZF 集合論）では証明できない命題になる．すべての G が決定性をもつという主張は選択公理と相反する主張になる．

1950年代にゲイルとスチュワートがこのようなゲームを考えた上で，G がベール空間 $\mathbf{N}^\mathbf{N}$ の開集合（あるいは閉集合）であれば，どちらかに必勝法があることを示した．その後，1970年代半ばには，すべてのボレル集合が決定性を持つことがマーチンによって証明された．さらに複雑な集合の決定性と他の集合論の原理（例えば，巨大基数の存在）との関係は，80年代以降の集合論の中心的研究テーマである．

さて，われわれはこの議論を2階算術で表現しよう．あるゲームにおいて，それ以前に行ったプレイの列から次の手を与える関数 $S: Seq\to\mathbf{N}$ を**戦略**と呼ぶ．プレイヤーⅠ，Ⅱがそれぞれ戦略 $S_\mathrm{I}, S_\mathrm{II}$ を選んだとき，

$$\begin{aligned} n_0 &= S_\mathrm{I}(\text{空列}\,\emptyset), \\ n_1 &= S_\mathrm{II}(n_0), \\ n_2 &= S_\mathrm{I}(n_0^\frown n_1), \\ n_3 &= S_\mathrm{II}(n_0^\frown n_1^\frown n_2), \\ &\ \ \vdots \end{aligned}$$

で決まる無限列 $(n_0{}^\frown n_1{}^\frown n_2{}^\frown n_3{}^\frown\cdots)$ を $S_{\rm I}\# S_{\rm II}$ と書く.

任意の Σ_1^0 式 $\varphi(X)$ に対して,

$$\exists S_{\rm I}\,\forall S_{\rm II}\varphi(S_{\rm I}\# S_{\rm II})\vee\exists S_{\rm II}\,\forall S_{\rm I}\neg\varphi(S_{\rm I}\# S_{\rm II})$$

が成り立つという主張を, **Σ_1^0 ゲームの決定性**という. これは, ゲイル＝スチュワートの定理を2階算術の言葉で表現したものに他ならないが, 詳細は省略する. この主張が ATR_0 と同値になる事実は, 1970年代半ばに J. スティールの学位論文の中で最初に証明された. (しかし, 彼は RCA_0 より少し強い体系の上で議論している.)

次に, 任意の2つの Σ_1^0 式 $\varphi(X),\psi(X)$ に対して, $\theta(X)=\varphi(X)\wedge\neg\psi(X)$ とおき,

$$\exists S_{\rm I}\,\forall S_{\rm II}\theta(S_{\rm I}\# S_{\rm II})\vee\exists S_{\rm II}\,\forall S_{\rm I}\neg\theta(S_{\rm I}\# S_{\rm II})$$

が成り立つという主張を, **$\Sigma_{1\rho}^0$ ゲームの決定性**と呼ぶ. そして, この主張は RCA_0 上で $\Pi_1^1-\mathrm{CA}_0$ と同値になる. Δ_2^0 ゲームや Σ_2^0 ゲームなどについても研究されているが, それはむしろ集合論に近い話題であるからここでは省略する.

現代記述集合論のもう一つの重要な概念は「ラムゼイ性」である. 前章で扱ったラムゼイの定理は, k 個の自然数の組の全体 $[\mathrm{N}]^k$ を l 個に分割したとき, 無限等質集合があるというものだった. それを, 自然数の無限集合の集合 $[\mathrm{N}]^{\mathrm{N}}$ を l 個に分割する問題に拡張したらどうなるだろうか？　これは1960年代に D. スコットが提起した問題で, 常に無限等質集合があるかどうかは普通の集合論 (ZF 集合論) から独立であることが知られている. $l=2$ として, $[\mathrm{N}]^{\mathrm{N}}$ を集合 C とその補集合に分割したとき, 無限等質集合が存在するならば, 集合 C は**ラムゼイ性**をもつという. 例えば, ボレル集合はラムゼイ性をもつ (ギャルビン＝プリクリの定理).

上の議論を多少簡単化して, 2階算術に埋め込む. まず, $[\mathrm{N}]^{\mathrm{N}}$ を狭義の単調増加関数の全体と考える. すなわち,

$$f \in [\mathbf{N}]^{\mathbf{N}} \Leftrightarrow \forall m \forall n (m < n \rightarrow f(m) < f(n)).$$

そして，任意の Σ^0_1 式 $\varphi(f)$ に対して，

$$\exists f \in [\mathbf{N}]^{\mathbf{N}} (\forall g \in [\mathbf{N}]^{\mathbf{N}} \varphi(f \circ g) \vee \forall g \in [\mathbf{N}]^{\mathbf{N}} \neg \varphi(f \circ g))$$

が成り立つということを，**Σ^0_1 分割のラムゼイ性**という．ここで，合成関数 $f \circ g$ の値域は，g を変化させることで，f の値域の任意の無限部分集合になることに注意．Σ^0_1 分割のラムゼイ性が ATR_0 と同値になることは，フリードマン＝マッカルーン＝シンプソンの定理（1982）として知られる．

さらに，Σ^0_2 分割，Δ^1_1 分割，Σ^1_1 分割のラムゼイ性も研究されている．Σ^0_2 分割のラムゼイ性は，RCA_0 上で Π^1_1－CA_0 と同値，すなわち $\Sigma^0_{1\rho}$ ゲームの決定性とも同値である（シンプソン＝シェラーの定理）．さらに，Δ^1_1 分割のラムゼイ性は Δ^0_2 ゲームの決定性と同値であり，Σ^1_1 分割のラムゼイ性は Σ^0_2 ゲームの決定性と同値であることが，筆者によって証明されている．

最後に，ATR_0 と Π^1_1－CA_0 の同値命題をまとめておこう．

定理群 4　次のどの定理も RCA_0 上で ATR_0 と同値になる．

（1）　2つの可算整列順序は比較可能

（2）　ルージンの分離定理

（3）　ベール空間における非可算な閉集合は完全集合を含む

（4）　可算被約アーベル p 群に対するウルム因子列の存在

（5）　Σ^0_1 ゲームの決定性（ゲイル＝スチュワートの定理）

（6）　Σ^0_1 分割のラムゼイ性

定理群 5　次のどの定理 もRCA_0 上で Π^1_1－CA_0 と同値になる．

（1）　カントル＝ベンディクソンの定理：閉集合は完全集合と可算集合の和で表せる

（2）　補解析同値関係についてのシルバーの定理

（3）　可算アーベル群は加除群と被約群の直積になる

（4） $\Sigma^0_{1\rho}$ ゲームの決定性

（5） Σ^0_2 分割のラムゼイ性

第3章　2階算術の諸体系

第2章では，主として内包公理に基づく2階算術の体系を扱ったが，ここではさらに選択公理など集合論でなじみ深いいくつかの公理の2階算術バージョンを導入する．そして，様々な公理系の間の論理的な包含関係を，モデル論的手法によって調べる．

3.1　AC, DC, SP, TI

本節では，**選択公理** AC (**Axiom of Choice**), **従属選択** DC (**Dependent Choice**), **分離原理** SP (**Separation Principle**)，**超限帰納法** TI (**Transfinite Induction**) などの公理を導入し，それらの公理に基づく諸体系の性質や相関関係を調べる．

定義 3.1　まず，$\mathcal{C}$ を2階算術の論理式の集合として，次の3つの公理図式を定義する．

$$(\mathcal{C}-\mathrm{AC}): \forall x \exists Y \varphi(x, Y) \to \exists Z \forall x \varphi(x, (Z)_x)$$

$$(\mathcal{C}-\mathrm{DC}): \forall x \forall X \exists Y \varphi(x, X, Y) \to \exists Z \forall x \varphi(x, (Z)_x, (Z)_{x+1})$$

$$(\mathcal{C}-\mathrm{SP}): \forall x(\varphi(x) \to \neg \psi(x)) \to \exists X \forall x\{(\varphi(x) \to x \in X) \land (x \in X \to \neg \psi(x))\}$$

ただし，上図式の φ と ψ は $\mathcal{C}$ に含まれる任意の論理式で，Z を自由変数として含まないものとする．また，

$$(Z)_x = \{z : (z, x) \in Z\}, \quad \text{そして}\ (z, x) = \frac{(z+x)\cdot(z+x+1)}{2} + z$$

である．

RCA_0 に公理図式(χ)を加えてできる体系を χ_0 と書く．例えば，$(\Sigma^1_2-\mathrm{AC})$ は $\mathcal{C}$ を Σ^1_2 式全体の集合としたときの ($\mathcal{C}-\mathrm{AC}$) を意味し，$\Sigma^1_2-\mathrm{AC}_0$ は $\mathrm{RCA}_0+(\Sigma^1_2-\mathrm{AC})$ のことである．

2つの体系 $\mathrm{T}_1, \mathrm{T}_2$ について，T_2 に含まれるすべての式が T_1 で証明されるとき，

$T_1 \vdash T_2$ または $T_1 \supseteq T_2$ と書く．そして，$T_1 \supseteq T_2$ かつ $T_2 \supseteq T_1$ のとき，$T_1 \equiv T_2$ と書く．

補題 3.1 (1) $\Pi^1_k - AC_0 \equiv \Sigma^1_{k+1} - AC_0$,

(2) $\Pi^1_k - DC_0 \equiv \Sigma^1_{k+1} - DC_0 \quad (k \geq 0)$.

証明 (1) $\varphi(x, Y) \equiv \exists W \psi(x, Y, W)$ かつ $\psi \in \Pi^1_k$ とし，$\forall x \exists Y \varphi(x, Y)$ を仮定する．RCA_0 において $\exists Y \exists W \psi(x, Y, W) \leftrightarrow \exists Y \psi(x, (Y)_0, (Y)_1)$ が容易にいえるので，$\forall x \exists Y \psi(x, (Y)_0, (Y)_1)$ となる．これに $(\Pi^1_k - AC)$ を適用すると $\exists Z \forall x \psi(x, ((Z)_x)_0, ((Z)_x)_1)$ を得る．従って，$\exists Z \forall x \exists W \psi(x, ((Z)_x)_0, W)$，すなわち $\exists Z \forall x \psi(x, ((Z)_x)_0)$ となる．この Z から $((Z)_x)_0 = (Z')_x$ となる Z' を定義すると，$\exists Z' \forall x \varphi(x, (Z')_x)$ となって，$(\Sigma^1_{k+1} - AC)$ が $\Pi^1_k - AC_0$ において証明された．(2) も同様に証明できる． □

補題 3.2 $\Delta^1_k - CA_0 \overset{(1)}{\subseteq} \Pi^1_k - SP_0 \overset{(2)}{\subseteq} \Sigma^1_k - AC_0 \overset{(3)}{\subseteq} \Sigma^1_k - DC_0 \ (k \geq 0)$.

証明 (1) $(\Pi^1_k - SP)$ の図式の前提部分 $\forall x(\varphi(x) \to \neg \psi(x))$ を $\forall x(\varphi(x) \leftrightarrow \neg \psi(x))$ に置き換えたものが $(\Delta^1_k - CA)$ であるから，この包含関係は明らか．

(2) $\varphi(x), \psi(x) \in \Pi^1_k$ で，$\forall x(\neg \varphi(x) \vee \neg \psi(x))$ と仮定する．いま，

$$\theta(x, Y) \equiv \neg \varphi(x) \wedge 0 \in Y \vee \neg \psi(x) \wedge 0 \notin Y$$

とおくと，$\forall x \exists Y \theta(x, Y)$ である．$(\Sigma^1_k - AC)$ より $\forall x \theta(x, (W)_x)$ となる W が存在するから，$X = \{x : 0 \in (W)_x\}$ とおけばこれが φ と ψ を分離する．

(3) $(\Sigma^1_k - DC)$ の図式において，$\varphi(x, X, Y)$ が X に依存しないものを考えれば $(\Sigma^1_k - AC)$ になる． □

問題 $WKL_0 \equiv \Sigma^0_1 - SP_0 \equiv \Pi^0_1 - AC_0 \equiv \Pi^0_1 - DC_0$ を示せ．

ヒント：定理 2.11 により，$\Sigma^0_1 - SP_0$ と WKL_0 は同値．$\Sigma^0_1 - SP_0 \subseteq \Pi^0_1 - AC_0 \subseteq \Pi^0_1 - DC_0$ は，上の証明と同様にして得られる．あとは，$WKL_0 \vdash (\Pi^0_1 - DC)$ を示せばよい．そのため，$\varphi(x, X, Y)$ を任意の Π^0_1 式とし，$\forall x \forall X \exists Y \varphi(x, X, Y)$ を仮定する．このとき，$\exists Z \forall x < m \varphi(x, (Z)_x, (Z)_{x+1})$ が任意の m で成り立つことを帰納法で示せ．WKL_0 において，この式は Π^0_1 式と同値である．最後に，コンパ

クト性を用いて，$\exists Z\,\forall x\varphi(x, (Z)_x, (Z)_{x+1})$ が導ける．

補題 3.3　$\Sigma^1_k-\mathrm{DC}_0\vdash\Sigma^1_k-$帰納法 $(k\geq 0)$．

証明　$k=0$ の場合も少しの手直しで同様に議論できるが，簡単のために $k>0$ とする．$\varphi(x)\equiv\exists X\theta(x, X)$ かつ $\theta\in\Pi^1_{k-1}$ とし，$\varphi(0)$ かつ $\forall x(\varphi(x)\rightarrow\varphi(x+1))$ を仮定する．いま，

$$\psi(x, X, Y)\equiv[x=0\wedge\theta(x, Y)]\vee[x>0\wedge(\theta(x-1, X)\rightarrow\theta(x, Y))]$$

とおくと，仮定から $\forall x\,\forall X\,\exists Y\psi(x, X, Y)$ である．ψ は Σ^1_k だから，$(\Sigma^1_k-\mathrm{DC})$ によって $\forall x\psi((Z)_x, (Z)_{x+1})$ となる Z が存在する．上の補題により $\Sigma^1_k-\mathrm{DC}_0\vdash(\Delta^1_k-\mathrm{CA})$ だから，$W=\{n : \theta(n, (Z)_{n+1})\}$ が存在する．あとは，Σ^0_0-帰納法により $\forall x\, x\in W$ がいえるので，$\forall x\varphi(x)$ が成立する．□

命題 3.4（近藤＝アディソンの定理）　任意の $\varphi(Y)\in\Pi^1_1$（または Σ^1_2）に対し，ある $\varphi^*(Y)\in\Pi^1_1$（または Σ^1_2）が存在して，次のことが $\Pi^1_1-\mathrm{CA}_0$ で証明できる：

（1）　$\forall Y(\varphi^*(Y)\rightarrow\varphi(Y))$，

（2）　$\exists Y\varphi(Y)\rightarrow\exists Y\varphi^*(Y)$，

（3）　$\forall Y, Z(\varphi^*(Y)\wedge\varphi^*(Z)\rightarrow Y=Z)$．

この命題の証明は，Shoenfield や Rogers などの教科書を参照．アディソンの証明は $\Pi^1_1-\mathrm{CA}_0$ でそのまま行える．上の命題において，φ^* は φ を**単層化**するという．

定理 3.5　$\Delta^1_2-\mathrm{CA}_0\equiv\Pi^1_2-\mathrm{SP}_0\equiv\Sigma^1_2-\mathrm{AC}_0$．

証明　補題3.2により，$\Delta^1_2-\mathrm{CA}_0\vdash(\Sigma^1_2-\mathrm{AC}_0)$を示せば十分．そこで，$\forall x\exists Y\varphi(x, Y)$，$\varphi\in\Sigma^1_2$ と仮定する．命題 3.4 により，φ を単層化する Σ^1_2 式 φ^* が存在する．いま，

$$\psi_1(i, x)\equiv\exists Y(\varphi^*(x, Y)\wedge i\in Y),$$
$$\psi_2(i, x)\equiv\forall Y(\varphi^*(x, Y)\rightarrow i\in Y)$$

とおくと，$\psi_1\leftrightarrow\psi_2$ だから，$(\Delta^1_2-\mathrm{CA})$ から $Z=\{(i, x) : \psi_1(i, x)\}$が存在する．従って，$\forall x\varphi^*(x, (Z)_x)$，すなわち $\forall x\varphi(x, (Z)_x)$ を得る．□

定理 3.6　$\Delta^1_2-\mathrm{CA}_0+\Sigma^1_2-$帰納法$\equiv\Sigma^1_2-\mathrm{DC}_0$．

証明　補題 3.2 及び 3.3 から，$\Delta^1_2-\mathrm{CA}_0+\Sigma^1_2$－帰納法$\subseteq\Sigma^1_2-\mathrm{DC}_0$ である．逆を示すために，$\forall x\,\forall X\,\exists Y\varphi(x, X, Y), \varphi\in\Sigma^1_2$ と仮定する．命題 3.4 により，φ の単層化 φ^* が存在する．そして，

$$\psi(x, W)\equiv(W)_0=\emptyset\wedge\forall y<x\varphi^*(y, (W)_y, (W)_{y+1})$$

とおく．($\Sigma^1_2-\mathrm{AC}$) により ψ は Σ^1_2 式に書き直せるから，Σ^1_2－帰納法 から $\forall n\,\exists W\psi(n, W)$ を得る．そこで，

$$\psi_1(i,x)\equiv\exists W(\psi(x, W)\wedge i\in W)$$

$$\psi_2(i,x)\equiv\forall W(\psi(x, W)\rightarrow i\in W)$$

とおくと，$\psi_1\leftrightarrow\psi_2$ だから，($\Delta^1_2-\mathrm{CA}$) より $Z=\{(i, X):\psi_1(i,x)\}$が存在する．そして，$\forall x\varphi(x, (Z)_x, (Z)_{x+1})$ を得る．□

注：$\Delta^1_2-\mathrm{CA}_0\nvdash\Sigma^1_2$－帰納法である（定理 3.18 に続くコメントを参照）．

定義 3.2　“X が自然数上の整列順序である”という述語を $WO(X)$ で表し，$(i,j)\in X$ を $i<_x j$ と書く．このとき，次の図式を**超限帰納法**という．

$$(\mathcal{C}-\mathrm{TI}):\ \forall X(WO(X)\rightarrow(\forall j(\forall i<_x j\,\varphi(i)\rightarrow\varphi(j))\rightarrow\forall j\,\varphi(j))).$$

ただし，φ は $\mathcal{C}$ に含まれる任意の論理式とする．そして，$\mathcal{C}-\mathrm{TI}_0\equiv\mathrm{ACA}_0+(\mathcal{C}-\mathrm{TI}_0)$ とおく．

定義 3.3　超準自然数を含まない 2 階算術の構造 $(\omega, S, +, \cdot, \cdots)$ を **ω-モデル**という．さらに，ω-モデル $(\omega, S, +, \cdot, \cdots)$ が以下の条件を満たすとき **β-モデル**という：

真なる Σ^1_1 文（S の要素をパラメータとして含む）は，$\mathfrak{M}$ においても成り立つ，

言い換えれば，

$\mathfrak{M}$ において成り立つ Π^1_1 文（S の要素をパラメータとして含む）は，真である．

補題 3.7　（1）　任意の ω-モデル $\mathfrak{M}$ に対し，$\mathfrak{M}\models\Sigma^1_\infty$－帰納法．

（2）　任意の β-モデル $\mathfrak{M}$ に対し，$\mathfrak{M}\models(\Sigma^1_\infty-\mathrm{TI})$．

証明　(1) $\mathfrak{M}$を任意の ω-モデル, $\varphi(x)$を任意の論理式とし, $\mathfrak{M}\models\varphi(0)\land\forall x(\varphi(x)\to\varphi(x+1))$ を仮定する．すると，$\varphi^{\mathfrak{M}}(0)$ かつ $\forall n\in\omega(\varphi^{\mathfrak{M}}(n)\to\varphi^{\mathfrak{M}}(n+1))$ だから，メタ世界の帰納法により $\forall n\in\omega\varphi^{\mathfrak{M}}(n)$．よって$\mathfrak{M}\models\forall x\varphi(x)$ を得る．(2) $\mathfrak{M}$が β-モデルなら，$\mathfrak{M}$ の整列順序は真の整列順序であるから，メタ世界の整列性を用いて，(1)とほぼ同様に超限帰納法が証明できる．□

補題 3.8　任意の β-モデル $\mathfrak{M}$ に対し，$\mathfrak{M}\models\mathrm{ATR}_0$.

証明　$\mathfrak{M}=(\omega,S)$を β-モデルとする．いま，$\sigma\equiv\exists X\psi(X)$ で $\psi(X)\in\Pi^1_1$ とすると，

$$\mathfrak{M}\models\sigma\Rightarrow(\exists B\in S\,\mathfrak{M}\models\psi(B))\Rightarrow\exists B\psi(B)\text{ は真}\Rightarrow\sigma\text{ は真}.$$

これを逆に見れば，真なる Π^1_2 文はすべて $\mathfrak{M}$ で成り立つことになる．ATR_0 は Π^1_2 式で表現できる真なる命題だから，$\mathfrak{M}$ で成り立つ．□

補題 3.9　$\Pi^1_1-\mathrm{CA}_0\vdash$可算 β-モデルが存在する.

証明の概略　$\varphi(e,X,Y)$を universal な Σ^1_1 述語とする．すなわち，任意の Σ^1_1 述語 $\psi(X,Y)$ は，ある e について，$\psi(X,Y)\leftrightarrow\varphi(e,X,Y)$と表せる．以下，$(\omega,S)$ が β-モデルとなるような集合列 $S=\{X_n\}$ を再帰的に定義する．まず，$X^{<n}=\{(i,j):i<n,j\in X_i\}$ が定義されているとし，さらに $\exists Y\varphi(e,X^{<n},Y)$ が真であるとしよう．このとき，Gandy の basis theorem (Rogers の教科書などを参照) を用いれば，$\varphi(e,X^{<n},Y)$ かつ $\mathcal{O}^Y\equiv_h\mathcal{O}^{X^{<n}}$ となる Y が存在するので，それを $X_{(e,n)}$ とおく．ここで，$X_{(e,n)}$ の添字 (e,n) は (n 以上の) ある自然数を表している．また，$\mathcal{O}$ はクリーネの完全 Π^1_1 集合である．$\exists Y\varphi(e,X^{<n},Y)$ でないときは，$X_{(e,n)}=\emptyset$とおけばよい．すると，すべての n について $\mathcal{O}^{X^{<n}}\equiv_h\mathcal{O}$ が示せるから $S=\{X_n\}$ は $\Pi^1_1-\mathrm{CA}_0$ で存在する．$S=\{X_n\}$ の要素をパラメータに含む任意の Σ^1_1 式は $\exists Y\varphi(e,X^{<n},Y)$ と表せ，もしそれが真なら (ω,S) で成り立つことはその構成から明らかなので，(ω,S) は β-モデルになる．□

補題 3.10　$\mathrm{ATR}_0+(\Sigma^1_\infty-\mathrm{TI})\nvdash\Pi^1_1-\mathrm{CA}_0$.

証明　補題3.7-9 より，$\Pi^1_1-\mathrm{CA}_0\vdash\mathrm{Con}\,(\mathrm{ATR}_0+\Sigma^1_\infty-\mathrm{TI})$．従って，$\mathrm{ATR}_0$

$+\Sigma^1_\infty-\mathrm{TI}\vdash\Pi^1_1-\mathrm{CA}_0$ はゲーデルの第 2 不完全性定理に反する. □

定理 3.11（シンプソンの定理） $\Sigma^1_1-\mathrm{TI}_0\equiv\mathrm{ATR}_0+\Sigma^1_1-$帰納法.

証明の概略 まず, $\mathrm{ATR}_0+\Sigma^1_1-$帰納法$\vdash(\Sigma^1_1-\mathrm{TI})$を示すために, $\mathrm{ATR}_0+\Sigma^1_1-$帰納法において $(\Sigma^1_1-\mathrm{TI})$ を否定し, 矛盾を導く. $WO(X)$ とし, ある Π^1_1 式 φ について, $\exists m\varphi(m)$ かつ $\forall m(\varphi(m)\to\exists n<_X m\varphi(n))$ と仮定する. Π^1_1 集合は整列集合のコードの集まりと考えられ, ATR_0 では 2 つの整列集合の大小が比較ができるから, ATR_0 では Π^1_1 集合に対する一種の選択関数が存在する（クライゼルの Π^1_1 単層化定理）. 従って, $n<_X m\wedge\varphi(n)$ を単層化する Π^1_1 式を $\psi(m,n)$ とおけば,

$$\varphi(m)\to\exists!n\psi(m,n),\quad \psi(m,n)\to n<_X m\wedge\varphi(n).$$

いま, $\varphi(m)$ となる m を固定し, Π^1_1-帰納法$(\leftrightarrow\Sigma^1_1-$帰納法$)$を用いて, $\forall k\,\exists!\sigma$ $[\sigma(0)=m\wedge\forall i<k\psi(\delta(i),\delta(i+1)]$ がいえる. すると, $(\Delta^1_1-\mathrm{CA})$ により

$$f(0)=m\wedge\forall i\psi(f(i),f(i+1))$$

となる f が存在する. すなわち, $\forall if(i+1)<_X f(i)$ であるから, $WO(X)$ と矛盾する.

逆を示すために, $\varphi(j)$ を“超限再帰的階層が $<_X$ に沿って j まで存在する”という命題とおく. $\varphi(j)$ はΣ^1_1 であり, $<_X$ に沿っての各ステップは ACA_0 で証明できるから, $\Sigma^1_1-\mathrm{TI}_0$ において $\forall j\varphi(j)$, すなわち (ATR) が証明できる. □

注：$\mathrm{ATR}_0\nvdash\Sigma^1_1-$帰納法（定理 3.18）.

Σ^1_n-帰納法と Π^1_n-帰納法は同値だが, $(\Sigma^1_n-\mathrm{TI})$ と $(\Pi^1_n-\mathrm{TI})$ は異なる. 上の定理と次の定理 3.12 および補題 3.13 を組み合わせれば, $\Sigma^1_1-\mathrm{TI}_0\vdash\mathrm{ATR}_0$ だが, $\Pi^1_1-\mathrm{TI}_0\nvdash\mathrm{ATR}_0$ となる.

定理 3.12（ハワード＝クライゼルの定理） $\Pi^1_1-\mathrm{TI}_0\equiv\Sigma^1_1-\mathrm{DC}_0$.

証明の概略 まず, $\Sigma^1_1-\mathrm{DC}_0$ から$(\Sigma^1_1-\mathrm{TI})$を示そう. いま, $\varphi(n)\equiv\exists X\theta(n,X)$ かつ $\theta\in\Pi^1_0$ として,

$$\forall n(\varphi(n) \to \exists m<_X n\varphi(m)),$$

を仮定する．すると，

$$\forall n \forall Y_1 \exists m \exists Y_2(m<_X n \wedge (\theta(n, Y_1) \to \theta(m, Y_2)))$$

となるから，(Σ^1_1-DC) を用いて $<_X$ の無限下降列を得て，$\neg WO(X)$ である．よって，$\Sigma^1_1-\mathrm{DC}_0$ から (Π^1_1-TI)（の対偶）が示された．

逆を示すには，$\theta\in\Pi^0_0$ として，$\forall f\exists g\forall n\theta(f|_n, g|_n) \to \exists h\forall k\forall n\theta(h_k|_n, h_{k+1}|_n)$ を $\Pi^1_1-\mathrm{TI}_0$ で証明すればよい．但し，$f|_n$ は数列 $(f(0), f(1), \cdots, f(n-1))$ のコードを表す．いま，木 $T(\subseteq\omega^{<\omega})$ を下のように定義する．

$$T=\{t: \forall k<\mathrm{lh}(t)\ \forall n\leq\min(leng(t_k), leng(t_{k+1}))\ \theta(t_k|_n, t_{k+1}|_n)\}.$$

もし，T が無限道 h を持つなら，$\forall k\forall n\theta(h_k|_n, h_{k+1}|_n)$ となる．そこで，T が無限道を持たない場合，すなわち T が KB 順序 (Kleene-Brower ordering) において整礎 (well-founded) の場合を考える．いま，

$$t\in T \text{ が good} \Leftrightarrow \exists h\forall k<\mathrm{lh}(t)\ \forall n\theta(h_k|_n, h_{k+1}|_n)\wedge h|_{leng(t)}=t$$

と定義する．明らかに，空列は good である．また，$\forall f\exists g\forall n\theta$ の仮定から，good 列 は good な拡張列（KB 順序において，より小さな列）をもつ．good 性は Σ^1_1 で書ける述語だから，(Π^1_1-TI) より T は KB 順序に関して整礎ではない．これは矛盾である．□

補題 3.13　$\Sigma^1_1-\mathrm{DC}_0+\Sigma^1_\infty-$帰納法$\nvdash\mathrm{ATR}_0$,　$\mathrm{ATR}_0+\Sigma^1_\infty-$帰納法$\nvdash\Sigma^1_1-\mathrm{DC}_0$.

証明　前半は，$(\omega, HYP)\vdash\Sigma^1_1-\mathrm{DC}_0+\Sigma^1_\infty-$帰納法$+\neg\mathrm{ATR}_0$ より明らか．但し，HYP は ω の Δ^1_1 部分集合全体の集合．後半を示すために，まず $\sigma\equiv\forall X\exists Y\theta(X, Y)$ かつ $\theta\in\Pi^1_0$ として σ の成立を仮定する．(Σ^1_1-DC) が成り立つとすれば，$\forall n\theta((Z)_n, (Z)_{n+1})$ となる $Z=\{(Z)_n\}$ が存在して，$(\omega, Z)\vDash\sigma$ である．$\varphi\in\Sigma^1_\infty$ に対して，φ を (ω, Z) で解釈する際，集合量化記号の変域は$\{(Z)_n\}$であるから，Z において φ は算術的に取り扱うことができる．従って，$(\omega, Z)\vDash\Sigma^1_\infty-$帰納法で

ある．以上から，$\Sigma^1_1-\mathrm{DC}_0+\sigma\vdash\mathrm{Con}(\sigma+\Sigma^1_\infty$－帰納法)．いま，$\sigma=\mathrm{ATR}_0$ とおくと，$\mathrm{ATR}_0+\Sigma^1_\infty$－帰納法$\vdash\Sigma^1_1-\mathrm{DC}_0$ ならば，$\mathrm{ATR}_0+\Sigma^1_\infty$－帰納法$\vdash\mathrm{Con}(\mathrm{ATR}_0+\Sigma^1_\infty$－帰納法) となるから，ゲーデルの第 2 不完全性定理に反する． □

3.2　再帰的飽和モデル

ここでの主目標は，「$\Sigma^1_1-\mathrm{AC}_0$ が ACA_0 の Π^1_2－保存的拡大になる」というバーワイズ＝シュリップの結果の紹介であるが，まずこの証明のために開発された再帰的飽和モデルについて述べよう．

定義 3.4　L を可算個の記号からなる言語とする．L における可算構造 $\mathfrak{M}$ が以下の条件を満たすとき，**再帰的に飽和** (**recursively saturated**) であるという．k を任意に固定し，$\Phi=\{\varphi_i(x,v_1,\ldots,v_k)\}$を L の論理式の任意の再帰的集合として，

$$\forall b_1,\ldots,b_k\in M[\,\forall j\,\exists a\in M\forall i\leq j\,\mathfrak{M}\models\varphi_i(a,b_1,\ldots,b_k)\to\exists a\in M\forall i\,\mathfrak{M}\models\varphi_i(a,b_1,\ldots,b_k)\,].$$

補題 3.14　可算言語 L における無矛盾な文の集合は，再帰的に飽和な（高々）可算モデルをもつ．

証明　レーベンハイム＝スコーレムの定理（定理 1.2）により，可算言語における無矛盾な集合は，可算モデル $\mathfrak{M}_0$ を持つ．いま，

$S_1=\mathfrak{M}_0$の初等ダイヤグラム（$\mathfrak{M}_0$ で成立する論理式全体）

$\cup\{\exists x\forall i<j\,\varphi_i(x,b_1,\ldots,b_k)\to\forall i<j\,\varphi_i(c_{(\Phi,b_1,\ldots,b_k)},b_1,\ldots,b_k)$:

$\Phi=\{\varphi_i(x,v_1,\ldots,v_k)\}$ は再帰的集合，$b_1,\ldots,b_k\in M_0$,

$c_{(\Psi,b_1,\ldots,b_k)}$ は新しい定数記号$\}$

とおくと，コンパクト性定理から S_1 は可算モデル $\mathfrak{M}_1(\succ\mathfrak{M}_0)$ をもつ．そして，$\mathfrak{M}_0$ で有限充足可能な 1 変数の論理式の集合 $\{\varphi_i(x,b_1,\ldots,b_k)\}$（1-type という）は $\mathfrak{M}_1$ で充足可能になる．同様に $\mathfrak{M}_1$ の（パラメータを含む）論理式の集合に対応して $\mathfrak{M}_2$ を作り，さらに $\mathfrak{M}_2$ から $\mathfrak{M}_3$，というように作っていき，$\mathfrak{M}=\cup_n\mathfrak{M}_n$ が求めるものである． □

L を1階算術の言語とし，これに可算個の1変数述語記号（または集合定数記号）$A_1, A_2, \cdots$ を加えた言語を $L(\bar{A})$ で表す．いま，$L(\bar{A})$ の構造 $(M, \bar{A}^M) = (M, \bar{A}_1^M, \bar{A}_2^M, \cdots)$ が与えられたとし，

$$(A_n^M)_b = \{a \in M : (M, \bar{A}^M) \vDash (a, b) \in A_n\}$$

と定める．そして，

$$S_M = \{(A_n^M)_b : n \in \mathbf{N}, b \in M\}$$

とおく．このとき，次のことがいえる．

補題 3.15　$\varphi(e, m, X)$ を universal な Σ_1^0 論理式とする．すなわち，$\{m : \varphi(e, m, X)\}$ は，パラメータ X をもつ e 番目の Σ_1^0 集合である．いま，$(M, \bar{A}^{\mathfrak{M}})$ が，基本算術公理，Σ_1^0－帰納法，及び各 $n \in \mathbf{N}$ について

$$(*) \qquad \forall e\, \exists j\, \forall m(\varphi(e, m, A_n) \leftrightarrow m \in (A_{n+1})_j)$$

を満たす再帰的に飽和なモデルとすれば，$(M, S_M) \vDash \Sigma_1^1-\mathrm{AC}_0$.

注：定理 3.16 の証明には（*）において $j = e$ の場合を考えれば十分．一般形は定理 3.17 の証明に必要となる．

証明　条件（*）のもとで $(M, S_M) \vDash \mathrm{ACA}_0$ は容易にわかる．あとは，$(M, S_M) \vDash (\Pi_0^1-\mathrm{AC})$ をいえばよい（補題3.1）．いま，$\theta \in \Pi_0^1$ として，$(M, S_M) \vDash \forall x\, \exists Y \theta(x, Y)$ と仮定する．このとき，$(M, \bar{A}^M) \vDash \forall x\, \exists y \theta(x, (A_n)_y)$ となる n が存在する．そうでないと，$\{\neg \exists y \theta(x, (A_n)_y) : n \in \mathbf{N}\}$ は有限充足可能な集合だから，$(M, \bar{A}^{\mathfrak{M}})$ の飽和性から，ある $a \in M$ が存在して，任意の $n \in \mathbf{N}$ に対して，

$$(M, \bar{A}^M) \vDash \neg \exists y \theta(a, (A_n)_y).$$

よって，$(M, S_M) \vDash \neg \exists Y \theta(a, Y)$ となり，最初の仮定に反する．

従って，$(M, S_M) \vDash \exists W \forall x\, \exists y \theta(x, (W)_y)$ だから，$(M, S_M) \vDash \exists Y \forall x \theta(x, (Y)_x)$ も容易に導ける．以上によって，$(M, S_M) \vDash \Sigma_1^1-\mathrm{AC}_0$ が示された．　□

定理 3.16（バーワイズ＝シュリップの定理）　任意の Π_2^1 文 σ に対して，$\Sigma_1^1-\mathrm{AC}_0$

$\vdash \sigma \Rightarrow \mathrm{ACA}_0 \vdash \sigma$.

証明　$\sigma \equiv \forall X \exists Y \theta(X, Y)$ かつ $\theta \in \Pi^0_1$ とし，$\mathrm{ACA}_0 \nvdash \sigma$ と仮定する．ゲーデルの完全性定理から，$(M, S) \vDash \mathrm{ACA}_0 + \neg \sigma$ となるモデル (M, S) がある．いま，$(M, S) \vDash \neg \exists Y \theta(A^M_0, Y)$ となる $A^M_0 \in S$ を選ぶ．$(M, S) \vDash \mathrm{ACA}_0$ だから，$\varphi(e, m, X)$ を universal な Σ^0_1 論理式として，各 $n \in \mathbf{N}$ について再帰的に，

$$(M, S) \vDash \forall e \forall m (\varphi(e, m, A^M_n) \leftrightarrow m \in (A^M_{n+1})_e)$$

となる $A^M_{n+1} \in S$ が選べる．こうして作られる $(M, \bar{A}^M)$ は，基本算術公理，Σ^0_1－帰納法，$\forall e \forall m (\varphi(e, m, A_n) \leftrightarrow m \in (A_{n+1})_e)$ $(n \in \mathbf{N})$，及び $\neg \exists y \theta(A_0, (A_n)_y)$ $(n \in \mathbf{N})$ をすべて成り立たせるから，これらの論理式の集合は無矛盾であり，命題 3.14 により再帰的に飽和な可算モデル $(\widetilde{M}, \bar{A}^{\widetilde{M}})$ をもつ．そこで，補題 3.15 のように $S_{\widetilde{M}}$ を定義すれば，

$$(\widetilde{M}, S_{\widetilde{M}}) \vDash \Sigma^1_1\text{-}\mathrm{AC}_0 + \neg \exists Y \theta(A^{\widetilde{M}}_0, Y).$$

よって，$\Sigma^1_1\text{-}\mathrm{AC}_0 + \neg \sigma$ は無矛盾となり，$\Sigma^1_1\text{-}AC_0 \nvdash \sigma$を得る．□

次の補題も，上の定理と類似の方法で証明される．

補題 3.17　任意の Π^1_3 文 σ に対して，$\Sigma^1_1\text{-}\mathrm{AC}_0 + \Sigma^1_1$－帰納法$\vdash$ (“$\Sigma^1_1\text{-}\mathrm{AC}_0 \vdash \sigma$” $\to \sigma$).

証明　σ を任意の Π^1_3 文とし，$\sigma \equiv \forall X \exists Y \forall Z \theta(X, Y, Z)$ かつ $\theta \in \Pi^1_0$ とする．以下，$\Sigma^1_1\text{-}\mathrm{AC}_0 + \Sigma^1_1$－帰納法のもとで，$\sigma$ を否定して議論を進める．簡単のために，$\forall Y \exists Z \neg (A_0, Y, Z)$ となる A_0 を固定しておく．

さて，$\varphi(e, m, X)$ を universal な Σ^0_1 論理式として，

$$\psi(X, Y, Z) \equiv \forall e \exists j \forall m (\varphi(e, m, X) \leftrightarrow m \in (Z)_j) \wedge \forall i \exists j \neg \theta(X, (Y)_i, (Z)_j)$$

とおく．$(\Pi^1_0\text{-CA})$ と $(\Sigma^1_1\text{-AC})$ を用いれば，

$$\forall Y \exists Z \neg \theta(A_0, Y, Z)$$

が得られるから，Σ^1_1－帰納法により，

$$\forall n \exists W((W)_0 = A_0 \wedge (\forall i < n)\psi(A_0, (W)_i, (W)_{i+1}))$$

となる．従って，基本算術公理，Σ_1^0－帰納法及び $\psi(A_0, A_n, A_{n+1})$ $(n \in \mathbf{N})$ を成り立たせる可算モデル $(M, \bar{A}^M)$ の存在がいえる．命題 3.14 により，さらにその再帰的に飽和な可算モデル $(\widetilde{M}, \bar{A}^{\widetilde{M}})$ が存在し，補題 3.15 より $(\widetilde{M}, S_{\widetilde{M}}) \models \Sigma_1^1-\mathrm{AC}_0$. また，$(\widetilde{M}, S_{\widetilde{M}}) \models \forall Y \exists Z \neg \theta(A_0, Y, Z)$ は明らかだから，$(\widetilde{M}, S_{\widetilde{M}}) \models \neg \sigma$. よって，$\mathrm{Con}(\Sigma_1^1-\mathrm{AC}_0 + \neg \sigma)$，すなわち $\Sigma_1^1-\mathrm{AC}_0 \nvdash \sigma$ となる．以上で，証明が完了した．□

定理 3.18　$\mathrm{ATR}_0 \nvdash \Sigma_1^1$－帰納法.

証明　定理 3.17 において，$\sigma = \neg(\mathrm{ATR})$ とおく．このとき，“$\Sigma_1^1-\mathrm{AC}_0 \vdash \sigma$” は $\neg\mathrm{Con}(\mathrm{ATR}_0)$ に他ならないから，対偶をとって，

$$\Sigma_1^1-\mathrm{AC}_0 + \Sigma_1^1\text{－帰納法} \vdash (\mathrm{ATR}) \rightarrow \mathrm{Con}(\mathrm{ATR}_0).$$

$\mathrm{ATR}_0 \vdash (\Sigma_1^1-\mathrm{AC})$ だから，

$$\mathrm{ATR}_0 + \Sigma_1^1\text{－帰納法} \vdash \mathrm{Con}(\mathrm{ATR}).$$

従って，もしも $\mathrm{ATR}_0 \vdash \Sigma_1^1$－帰納法ならば，$\mathrm{ATR}_0 \vdash \mathrm{Con}(\mathrm{ATR}_0)$ となって，ゲーデルの第 2 不完全性定理と矛盾する．□

証明は省略するが，定理 3.16, 18 の自然な拡張として，次のこともいえる．

$$\text{任意の } \Pi_3^1 \text{ 文 } \sigma \text{ に対して，} \Sigma_2^1-\mathrm{AC}_0 \vdash \sigma \Rightarrow \Pi_1^1-\mathrm{CA}_0 \vdash \sigma,$$

$$\Sigma_2^1-\mathrm{AC}_0 \nvdash \Sigma_2^1\text{－帰納法}.$$

3.3　強制法とハーリントンの定理

本節では，「WKL_0 が RCA_0 の Π_1^1-保存的拡大になる」というハーリントンの定理を紹介する．この定理の証明は，公理的集合論で開発された**強制法** (forcing) という技法のエレガントな応用であり，これから強制法を学ぼうとしている人には格好の教材になると思う．

半順序集合 $(P, <)$ を任意に固定し，$p, q, r, \cdots$ で P の元を表す．次の条件を満

たす集合 $G\subseteq P$ を**開集合**と呼び，これによって $(P,<)$ は位相空間となる．

$$\forall p,q\,(q<p\wedge p\in G\Rightarrow q\in G).$$

いま，

$$[p]=\{q\in P : q\leq p\}$$

とおくと，任意の開集合 G は $\bigcup_{p\in G}[p]$ と一致するから，$\{[p] : p\in P\}$ は開基底を形成する．

任意の空でない開集合と空でない交わりをもつ集合 $D\subseteq P$ を**稠密**な集合という．D が稠密である条件は，

$$\forall p\,[p]\cap D\neq\emptyset,\quad \text{あるいは}\quad \forall p\,\exists d\in D\,d\leq p$$

と同値である．

次の条件を満たす $F\subseteq P$ を（**強**）**フィルター**と呼ぶ．

1）$p\in F\wedge p<q\Rightarrow q\in F$,

2）$\forall p,q\in F\quad [p]\cap[q]\cap F\neq\emptyset$.

定義 3.5 集合 M が与えられたとき，M に属するすべての稠密な集合 $D\subseteq P$ と空でない交わりをもつフィルター G を M–**一般(generic)** フィルターと呼ぶ．

補題 3.19 M が P の稠密な部分集合を高々可算個しか含まないとき，任意の $p\in P$ に対し，p を要素とする M–一般フィルター G が存在する．

証明 M に含まれる P の稠密な部分集合を並べ上げ，$D_0, D_1, \ldots, D_i, \ldots\ (i\in\omega)$ とする．与えられた $p\in P$ に対して，P の要素の減少列 $p_0\geq p_1\geq\cdots$ を次のように作る．まず $p_0=p$ とおく．各 $n>0$ に対しては $p_n\in[p_{n-1}]\cap D_{n-1}$ となる元 p_n を選ぶ．そして，$G=\{q : \exists i\ p_i\leq q\}$ とおけば，明らかに $p\in G$ かつ G は M–一般フィルターである．□

余談．筆者が初めてアメリカに渡った1980年頃のことである．カリフォルニア大学バークレイ校の近くのスーパーを覗くと，GENERIC FILTER CIGARETS と書かれた紙箱の山が目に入った．集合論のすすんだアメリカでは，GENERIC FILTER

というブランド名のタバコがあるのかと本当に感心した．それから，しばらくして再びそのスーパーに行き，タバコの山の隣に GENERIC POTATO CHIPS など GENERIC の名の付いた商品が他にもあることがわかったが，GENERIC がノー・ブランド（無印）の意味であることを知るまでにはさらに月日が必要だった．

さて，これからハーリントンの証明に入る．まず，$\mathfrak{M}=(M,S)$ を RCA_0 の可算モデルとする．ここで，M は1階部分の（自然数に対応する）領域であり，$S\subseteq\mathcal{P}(M)$ とする．そして，

$$P=\{T\in S:\mathfrak{M}\models\text{“}T\text{ は}\{0,1\}^{<\omega}\text{ の無限部分木”}\}$$

とおき，さらに

$$T_1\leq T_2\Leftrightarrow T_1\subseteq T_2$$

によって，P に半順序をいれる．このとき，

$$D\subseteq P\text{ は稠密}\Leftrightarrow\forall T\in P\ \exists T'\in D\ T'\subseteq T$$

である．

ある論理式 $\varphi(X)$（$M\cup S$ の要素をパラメータとして含んでよい）に対して，$E=\{T\in P:\mathfrak{M}\models\varphi(T)\}$ と表せる集合 $E\subseteq P$ は $\mathfrak{M}$ で定義可能であるといい，そのような集合の全体を $Def(\mathfrak{M})$ と書く．

補題 3.20　$F\subseteq P$ が $Def(\mathfrak{M})$-一般フィルターならば，すべての $T\in F$ は共通の無限道 $G=\cap F$ をもつ．すなわち，F は G で生成される主フィルター（$\subseteq\mathcal{P}(\mathfrak{M})$）に含まれる．

証明　任意の $k\in M$ に対し，$E_k=\{T\in P:\ \exists s\in\{0,1\}^k T\subseteq s^\frown\{0,1\}^{<\omega}\}$ は稠密かつ $\mathfrak{M}$ で定義可能である．F を $Def(\mathfrak{M})$-一般フィルターとすれば，各 k に対し，ある $s_k\in\{0,1\}^k$ が存在して，$T_k\subseteq s_k^\frown\{0,1\}^{<\omega}$ となる $T_k\in F$ がある．$k<k'$ ならば，s_k は $s_{k'}$ の始切片で，かつ $s_{k'}\in T_k$ となる．そうでないと，$[T_k]\cap[T_{k'}]=\emptyset$ となって，F のフィルター条件を崩す．そこで，$G=\bigcup_{k\in M}s_k$ とおけば $G=\bigcap_k T_k$ である．最後に，$G=\cap F$ をいう．$G\not\subseteq T\in F$ ならば，$s_k\notin T$ となる k が存在し，$[T]$

$\cap[T_k]=\emptyset$となって矛盾する． □

定義 3.6 $G(\subseteq M)$ が$\mathfrak{M}$-**一般道** (**generic path**) と呼ばれるのは，次の条件が成り立つときである：$\mathfrak{M}$で定義可能な任意の稠密集合 D において，G を無限道にもつような木 $T\in D$ が存在する．

補題 3.21 すべての $T\in P$ は，$\mathfrak{M}$-一般道 G をもつ．

証明 $Def(\mathfrak{M})$ は可算集合だから，命題3.19によりすべての T はある $Def(\mathfrak{M})$-一般フィルター F に含まれる．さらに，補題 3.20 により F の木には共通の無限道 G が存在する．この G が$\mathfrak{M}$-一般道になることは定義から明らか． □

補題 3.22 G を$\mathfrak{M}$-一般道とすれば，$(M,S\cup G)\models\Sigma_1^0$-帰納法．

証明 $\varphi(i,X)$を任意のΣ_1^0論理式とし，$\varphi(0,G)$かつ $\forall n(\varphi(n,G)\to\varphi(n+1,G))$ を仮定する．$b\in M$を任意に選び，$\varphi(b,G)$ を示したいのだが，そのためには $X=\{a\leq_M b:\varphi(a,G)\}\in S$ がいえればよい（(有限 Σ_1^0-CA)，補題 2.6 を参照）．なぜなら，$X\in S$ ならば，$\mathfrak{M}\models(\Delta_1^0$-CA) より $Y=\{a:a\in X\vee a>_M b\}\in S$．そして，$0\in Y$ かつ $\forall m(m\in Y\to m+1\in Y)$ は明らかだから，$\mathfrak{M}\models\Sigma_1^0$-帰納法 より $Y=M$．よって，$b\in X$，つまり $\varphi(b,G)$ を得る．従って，あとは $X\in S$ を示せばよい．

いま $\varphi(i,X)\equiv\exists j\,\theta(i,X|_j),\theta\in\Sigma_0^0$ として，

$$D_b\equiv\{T\in P:\mathfrak{M}\models\forall a\leq b\,(1)\,\forall t\in T\neg\theta(a,t)\vee$$
$$(2)\,\exists k\forall t\in T\cap\{0,1\}^k\exists s\subseteq t\theta(a,s)\}$$

とおく．もちろん D_b は$\mathfrak{M}$で定義可能である．まず，$T\in D_b$ かつ $T'\subseteq T$ ならば，$T'\in D_b$ となることに注意しておく．下に示すように D_b は稠密になるから，無限道 G をもつ木 T_0 が D_b の中に存在する．この T_0 の存在を仮定し，固定しておく．いま，$T=T_0$ が条件 (1) $\forall t\in T\neg\theta(a,t)$ や (2) $\exists k\forall t\in T\cap\{0,1\}^k\exists s\subseteq t\theta(a,s)$ を満たすことをそれぞれ(1)$[T=T_0]$や(2)$[T=T_0]$で表す．すると，各 $a\leq_M b$ に対して，

$$\mathfrak{M}\models(1)[T=T_0]\Rightarrow(M,S\cup G)\models\neg\varphi(a,G),$$
$$\mathfrak{M}\models(2)[T=T_0]\Rightarrow(M,S\cup G)\models\varphi(a,G)$$

であり，かつ$\mathfrak{M}\models(1)[T=T_0]\vee(2)[T=T_0]$ だから，

$$\mathfrak{M} \models (2)[T=T_0] \Leftrightarrow (M, S \cup G) \models \varphi(a, G)$$

となる．(2)は Σ_1^0 論理式で $\mathfrak{M} \models$ (有限 Σ_1^0−CA)（補題 2.6）だから，$X=\{a \leq_M b : \mathfrak{M} \models (2)[T=T_0]\} \in S$ である．

最後に，D_b が稠密になることを示そう．$\tilde{T} \in P$ を任意に選ぶ．各 $\sigma \in \{0,1\}^{\leq b}$ に対し，木 T_σ を次のように定義する：

$T_{<>} = \tilde{T}$,

$T_{\sigma^\frown<0>} = \{t \in T_\sigma : \forall s \subseteq t \neg \theta(a, s)\}$　但し $a = leng(\sigma)$,

$T_{\sigma^\frown<1>} = T_\sigma$.

そして，$S_b = \{\sigma \in \{0,1\}^{b+1} : T_\sigma$ は無限木$\}$ とおく．ここで，

$$T_\sigma \text{ が無限木} \Leftrightarrow \forall n \exists \tau \in \{0,1\}^n \tau \in T_\sigma$$

であり，右辺は Π_1^0 で表現されているので，(有限 Σ_1^0−CA) によって $S_b \in S$ である．また，$\overbrace{<1,1,\cdots,1>}^{b+1} \in S_b$ より $S_b \neq \emptyset$．いま，σ_b を S_b における辞書式順序の最初の要素とする．$a \leq_M b$ として，$\sigma_b(a) = 0$ ならば，

$$T_{\sigma_b} \subseteq T_{\sigma_b|a^\frown<0>} \subseteq \{t : \neg \theta(a, t)\}$$

より，(1)$[T=T_{\sigma_b}]$ がいえる．$\sigma_b(a)=1$ ならば，$T_{\sigma_b|a^\frown<0>}$ は有限だから，(2)$[T=T_{\sigma_b|a}]$，従って(2)$[T=T_{\sigma_b}]$ も成り立つ．以上から $T_{\sigma_b} \in D_b$ となり，D_b が稠密になることが示された．□

$T \in P$ の $\mathfrak{M}$-一般道 G を固定し，

$$S^T = \{X \subseteq M : X \text{ は } (M, S \cup G) \text{ で } \Delta_1^0 \text{ 式によって定義可能}\}$$

とおくと，次の補題が得られる．

補題 3.23　$(M, S^T) \models \mathrm{RCA}_0 + T$ は無限道をもつ．

証明　S^T の要素をパラメータとする Σ_1^0 論理式 φ に対し，$S \cup G$ の要素だけをパラメータとする Σ_1^0 論理式でそれと同値なもの ψ が存在する．この事実は以下のように証明される．φ が S^T の要素 X をパラメータにもつとする．X は $(M, S \cup G)$

において Δ^0_1 式によって定義されるから，$S \cup G$ の要素をパラメータとする Σ^0_1 論理式 χ_1 と χ_2 が存在して，$n \in X \leftrightarrow \chi_1(n) \leftrightarrow \neg\chi_2(n)$ である．φ に含まれる部分式 $t \in X$ を $\chi_1(t)$ または $\neg\chi_2(t)$ で置き換え，さらに他のパラメータがあれば同様な置換をすることで，いくつかの Σ^0_1 論理式を $\wedge, \vee, \forall n<t, \exists n<t, \exists$ でつなげた論理式で，$S \cup G$ の要素だけをパラメータとするものが得られる．最後に，この論理式を厳密な Σ^0_1 論理式に変形する操作は，Σ^0_1－帰納法を用いて普通に行える．

上の事実と補題 3.22 より，$(M, S^T) \models \mathrm{RCA}_0$ がいえる．また，(M, S^T) において，T は 無限道 G をもつ． □

補題 3.24　$S \subseteq S_\infty \subseteq \mathcal{P}(M)$ となる S_∞ が存在し，$(M, S_\infty) \models \mathrm{WKL}_0$.

証明　$S_0 \subseteq S_1 \subseteq \cdots$ を次のように作る．

$S_0 = S,$

$S_{(n,m)+1} = S^T_{(n,m)}$，但し T は $S_n (\subseteq S_{(n,m)})$ に含まれる m 番目の無限木．

ここで $(n, m) = \dfrac{(n+m)(n+m+1)}{2} + n$ であり，$(n, m) \geq n$ である．最後に，$S_\infty = \bigcup_{i \in \omega} S_i$ とおけば，これが求めるものであることは定義から明らか． □

定理 3.25（ハーリントンの定理）　任意の Π^1_1 文 σ に対して，$\mathrm{WKL}_0 \vdash \sigma \Rightarrow \mathrm{RCA}_0 \vdash \sigma$.

証明　σ を RCA_0 で証明されない Π^1_1 文とする．すると，ゲーデルの完全性定理から，$(M, S) \models \mathrm{RCA}_0 + \neg\sigma$ となる可算モデル (M, S) が存在する．いま，$\varphi \in \Pi^1_0$ として，$\neg\sigma \leftrightarrow \exists X \varphi(X)$ と表すと，$A \in S$ が存在して，$(M, S) \models \mathrm{RCA}_0 + \varphi(A)$ となる．上の補題により $S\infty$ を構成すれば，$(M, S\infty) \models \mathrm{WKL}_0 + \varphi(A)$ である．ここで，$\varphi(X)$ は算術的だから，$\varphi(A)$ の真偽は M と A のみに依存することに注意する．従って，$(M, S\infty) \models \mathrm{WKL}_0 + \neg\sigma$，つまり $\mathrm{WKL}_0 + \neg\sigma$ は無矛盾だから $\mathrm{WKL}_0 \nvdash \sigma$となる． □

3.4　半正則切断とフリードマンの定理

本節では，「WKL_0 が PRA の Π^0_2-保存的拡大になる」という H. フリードマン

の定理を紹介する．PRA は，Primitive Recusive Arithmetic の頭文字をとったもので，すべての原始再帰的関数（の定義）に対して関数記号をもち，それらの定義式を公理として，さらに Σ_0^0－帰納法をもつものと定義する．

注：帰納法を量化記号を含まない論理式に制限しても体系の強さは変わらない．PRA と「有限の立場」に関しては，2.3 節の後半を参照．

フリードマンの定理の証明は，集合論における正則基数（regular cardinal）のアナロジーが核になっているが，この技法は1970年代半ばに英国のパリスとその弟子たちによって開発されたものである．

PRA のモデルは $(M, f_0^M, f_1^M, \cdots)$ という形をしているが，$F=(f_0^M, f_1^M, \cdots)$ とおいて，簡単に (M,F) で表す．以下，PRA のモデル (M,F) を一つ固定して議論を進める．また，素数を小さい方から並べ上げる原始再帰的関数を $p \in F$ としておく．すなわち，$p(0)=2, p(1)=3, p(2)=5, \cdots$．

定義 3.7　集合 $X(\subseteq M)$ が以下のように表せるとき，$c \in M$ を X の**コード**という．

$$X=\{n \in M : M \models \exists d < c\, c = p(n) \cdot d\}.$$

コード c をもつ集合 X を M-**有限**集合といい，その要素の個数を $|X|$ または $|c|$ で表す．

注：$|c|$ は M 上の原始再帰的関数，すなわち $|c| \in F$ である．また，コード c をもつ集合 $X(\neq \emptyset)$ の最大元を $\max(c)$ と表せば，$\max(c) \in F$ である．

定義 3.8　I が M の真部分集合で，始切片になっており（すなわち，$a<b \in I \Rightarrow a \in I$），また後者関数で閉じている（すなわち，$a \in I \Rightarrow a+1 \in I$）ならば，$I$ を M の**切断** (**cut**) と呼び，$I \subseteq_e M$ と書く．さらに，$|X| \in I$ となる任意の M-有限集合 X に対して，$X \cap I$ が I のなかで有界になるような切断 $I \subseteq_e M$ を**半正則切断** (**semi-regular cut**) という．

注：$X \cap I$ が I で有界ならば，Σ_1^0－帰納法を用いて，$X \cap I$ が M-有限であること

がいえ，従って $X \cap I$ の最大元の存在もいえる．

定理 3.26（カービー＝パリスの定理）　$I \subseteq_e M$ が半正則切断ならば，$(I, F|_I) \models$ PRA．但し，$F|_I$ は，F の各関数 f の定義域を I に制限した関数 $f|_I$ からなる集合．

証明　まず，I が原始再帰的関数に関して閉じていることを示そう．各 $n \in \mathbf{N}$ に対して，１変数関数の原始再帰的関数 g_n を次のように定める．

$$g_0(x) = x+1,$$

$$g_{n+1}(x) = \overbrace{g_n g_n \cdots g_n}^{x+2}(x).$$

すると，任意の原始再帰的関数 f に対して，ある $n \in \mathbf{N}$ が存在し，

$$\mathrm{PRA} \vdash f(x_1, x_2, \ldots, x_k) < g_n(\max\{x_1, x_2, \ldots, x_k\})$$

がいえるから，I が各 g_n について閉じていることをいえば十分である．定義により，I は後者関数に関して閉じているから，$n=0$ の場合は成立．いま，g_n で成り立ち，g_{n+1} で成り立たないとして矛盾を導く．$g^M_{n+1}(a) \notin I$ となる $a \in I$ を選び，

$$X = \{g^M_n(a), g^M_n g^M_n(a), \cdots, \overbrace{g^M_n g^M_n \cdots g^M_n}^{a+2}(a)\}$$

とおく．$|X| = a+2 \in I$ だから，$X \cap I$ は有界で，最大元 b が存在する．しかし，I は g_n に関して閉じているから，$g^M_n(b) \in X \cap I$ となり，b の最大性に反する．

上のことから，$(I, F|_I)$ は (M, F) の部分構造と考えることができ，従って Σ^0_0 式については２つの構造における真理値が一致する．いま，$\varphi(x)$ を Σ^0_0 式として，$(I, F|_I) \models \varphi(0) \wedge \forall x(\varphi(x) \to \varphi(x+1)$ と仮定する．$c \in I$ を任意に取り，$\psi(x) = \varphi(x) \vee c < x$ とおくと，$\psi(x)$ も Σ^0_0 式で，$(M, F) \models \psi(0) \wedge \forall x(\psi(x) \to \psi(x+1)$ がいえる．$(M, F) \models \Sigma^0_0$－帰納法 だから $(M, F) \models \forall x \psi(x)$，従って $(I, F|_I) \models \forall x \psi(x)$ である．とくに，$\psi(c) \leftrightarrow \varphi(c)$ だから $(I, F|_I) \models \varphi(c)$ となる．$c \in I$ は任意に選んだので，$(I, F|_I) \models \forall x \varphi(x)$ を得る．すなわち，$(I, F|_I) \models \Sigma^0_0$－帰納法だから，$(I, F|_I) \models$ PRA．　□

定義 3.9　$I \subseteq_e M$ とする．ある M-有限集合 X に対して，$B = X \cap I$ と書ける集

合 $B \subseteq I$ を M-**コード化集合**と呼ぶ．そして，M-コード化集合全体を S_I と記す．

補題 3.27　$I \subseteq_e M$ が半正則切断ならば，$(I, S_I) \models \mathrm{WKL}_0$.

注：I 上の和積演算 $+^I$, $\cdot^I$ などは，M 上の適当な原始再帰的関数を I に制限することで与えられる．

証明　(I, S_I) が算術の基本公理を満たすことは問題ない．従って，示すべきことは，$(\Delta^0_1\text{-CA})$，弱ケーニヒの補題 (WKL)，Σ^0_1－帰納法であるが，まず Σ^0_1－帰納法から取りかかろう．

$I \cup S_I$ の要素をパラメータとしてもつ論理式 φ に対し，すべての集合パラメータ $B \in S_I$ をそれに対応する M-有限集合 X(すなわち，$B = X \cap I$) で置き換えてできる論理式を φ^* で表す．もう少し厳密にいえば，X のコードを c として，"$t \in B$" を "$\exists d < c\, c = p(t) \cdot d$" で置き換える．このとき，$\varphi$ が Σ^0_0 論理式ならば，任意の $a \in I$ に対し，

$$(I, S_I) \models \varphi(a) \Leftrightarrow (M, F) \models \varphi^*(a)$$

が成立するので，上の定理の証明と同様に，$(I, S_I) \models \Sigma^0_0$－帰納法が示される．

次に，θ を Σ^0_0 として，$\varphi(x) = \exists y \theta(x, y)$ とおき，$(I, S_I) \models \varphi(0) \wedge \forall x (\varphi(x) \rightarrow \varphi(x+1)$ と仮定する．目的は，任意の $c \in I$ に対して，$(I, S_I) \models \varphi(c)$ を示すことである．いま，$c \in I, d \in M - I$ を任意にとり，

$$Z = \{(a, b) : a <^M c, b <^M d \text{ かつ } (M, F) \models \theta^*(a, b) \wedge \forall x < b \neg \theta^*(a, x)\}$$

とおく．Z が M-有限で$|z| \leq^M c$ となることは明らかだから，I の半正則性から $Z \cap (I \times I)$ は有界，つまり $d' \in I$ が存在して，すべての $a <^M c$ について，

$$\exists b \in I\, (a, b) \in Z \Leftrightarrow \exists b < d'\, (a, b) \in Z.$$

従って，すべての $a <^M c$ に対して，

$$\begin{aligned}(I, S_I) \models \varphi(a) &\Leftrightarrow \exists b \in I\, (I, S_I) \models \theta(a, b) \\ &\Leftrightarrow \exists b \in I\, (M, F) \models \theta^*(a, b)\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \exists b <^M d' \ (M,F) \vDash \theta^*(a,b)$$
$$\Leftrightarrow (M,F) \vDash \exists y <^M d' \theta^*(a,y)$$

となる．$\exists y <^M d' \theta^*(a,y)$ は Σ^0_0 式で，$(M,F) \vDash \Sigma^0_0-$帰納法だから，すべての $a <^M c$ について $(I,S_I) \vDash \varphi(a)$．$c \in I$ を任意にとったので，$(I,S_I) \vDash \forall x \varphi(x)$ となる．

(Δ^0_1-CA) と弱ケーニヒの補題は，両者を合わせて (Σ^0_1-SP) と同値になる（定理 2.11）から，あとは $(I,S_I) \vDash (\Sigma^0_1-\mathrm{SP})$ を示せばよい．$\varphi_i(x) = \exists y \theta_i(x,y)$，$\theta_i(x,y) \in \Sigma^0_0$ $(i=0,1)$ とし，$(I,S_I) \vDash \neg \exists x(\varphi_0(x) \wedge \varphi_1(x))$ と仮定する．上と同様，φ の集合パラメータを M-有限集合 で置き換えた式を φ^* で表す．いま，$d \in M-I$ を任意にとり，

$$Y = \{a <^M d : \exists b <^M d (M,F) \vDash \theta^*_0(a,b) \wedge \forall x < b \neg \theta^*_1(a,x)\}$$

とおくと，Y は M-有限だから，$Y \cap I \in S_I$. そして，

$$(I,S_I) \vDash \forall a[(\varphi_0(a) \to a \in Y \cap I) \wedge (a \in Y \cap I \wedge \neg \varphi_1(a))]$$

も容易にいえるから，$(I,S_I) \vDash (\Sigma^0_1-\mathrm{SP})$．以上から，$(I,S_I) \vDash \mathrm{WKL}_0$ が証明された．□

次の補題が，フリードマンの定理（定理 3.29）の証明の要めの部分である．

補題 3.28　(M,F) を PRA の可算モデルとする．$c,d \in M$ として，すべての原始再帰的関数 f に対して，$f^M(c,c,\cdots,c) <^M d$ と仮定する．このとき，$c \in I$ で $d \notin I$ となる半正則切断 $I \subseteq_e M$ が存在する．

注：$c \in M-\mathrm{N}$ とし，c を含みすべての原始再帰的関数で閉じた最小の切断を J とする．この J は半正則切断にならない．その理由はおおよそ次の通りである．g_n を定理 3.26 の証明のなかで作った原始再帰的関数の列とし，$B(x,y,z) \leftrightarrow g_x(y) \leq z$とおく．（原始再帰的述語 $B(x,y,z)$ の正確な定義は，下の証明のなかで与えられる．）$J = \{a \in M : \exists n \in \mathrm{N} \ a <^M g^M_n(c)\}$だから，$J \vDash \neg \exists z B(c,c,z)$．もし，$J$ が半正則切断ならば，上の補題から $J \vDash \Sigma^0_1-$帰納法 だから，$J \vDash \neg \exists z B(a,c,z)$ となる

最小の $a \in J$ がある．すると，$J \models \exists z B(a-1, c, z)$ だから，$\exists n \in \mathbf{N}$ が存在して，$g_{a-1}(c) < g_n(c)$ である．$a \notin \mathbf{N}$ だから $a-1 \notin \mathbf{N}$ であり，これは不可能．よって，J は半正則切断でない．他方，J は PRA のモデルになっているので，PRA$\nvdash \Sigma_1^0$−帰納法が示された．

証明　まず，原始再帰的述語 $B(x, y, z)$ を以下のように定義する．

$B(0, y, z) \Leftrightarrow y < z$,

$B(x+1, y, z) \Leftrightarrow |X| < y$ となる任意の M-有限集合 $X \subset [y, z)$ に対し，

$B(x, y', z')$ で $[y', z') \cap X = \emptyset$ となる $[y', z') \subset [y, z)$ が存在する．

ただし，$[y, z] = \{w : y \leq w < z\}$．また，上式は，$\Sigma_0^0$ で表されているから，$B(x, y, z)$ は原始再帰的述語である．

$\{g_n\}$ を定理3.26の証明で作った原始再帰的関数の列とすると，各 $n \in \mathbf{N}$ について，

$$\mathrm{PRA} \vdash g_n(y) \leq z \rightarrow B(n, y, z)$$

が簡単なメタ帰納法で証明できる．そこで，$c, d \in M$ を題意のようにとると，任意の $n \in \mathbf{N}$ について，$g_n^M(c) <^M d$ だから $B(n, c, d)$ となる．すると，過剰原理(overspill) により，ある $b \in M - \mathbf{N}$ が存在して，$\forall a \leq^M b B(a, c, d)$ である．(過剰原理を使わず，帰納法により $\neg B(x, c, d)$ となる最小の x の存在を示し，$b = x-1$ とおいてもよい.)

さて，(M, F) を PRA の可算モデルとすると，M-有限集合は可算個しかない．そこで，$\{X_n\}$を M-有限集合の列で，各 M-有限集合はそのなかで無限回繰り返して現れるものとする．これを使って，縮小区間列 $\{[c_n, d_n]\}$ を以下のように定義する．

$$[c_0, d_0] = [c, d],$$

$$[c_{n+1}, d_{n+1}] = \begin{cases} [c_n, d_n) & |x_n| \geq^M c_n \text{ のとき} \\ [c_n', d_n'] & |x_n| <^M c_n \text{ のとき，} \quad B(b-n, c', d') \text{かつ} [c', d'] \cap X = \emptyset \\ & \text{をみたす } [c_n', d_n'] \subset [c_n, d_n] \text{を適当に選ぶ} \end{cases}$$

任意の $a\in M$ に対し，$\{a\}$ は M-有限だから，十分大きな n について $[c_n, d_n)\cap\{a\}=\emptyset$ つまり $a\notin[c_n, d_n]$ となる．従って，$\cap_n[c_n, d_n]=\emptyset$ である．

いま，$I=\{a\in M：\exists n\ a<^M c_n\}=\{a\in M：\forall n\ a<^M d_n\}$ とおき，I が半正則になっていることをみる．X が M-有限で $|X|\in I$ とする．$\{X_n\}$の定義から，無限個の n について $X=X_n$ となるから，$X=X_n$ かつ $|X|<^M c_n$ となる n がある．すると，$[c_{n+1}, d_{n+1})\cap X=\emptyset$．従って，$c_{n+1}$ は $X\cap I$ の上界であり，$X\cap I$ は I において有界になる．よって，I は半正則切断である． □

定理 3.29（フリードマンの定理） 任意の Π^0_2 文 σ に対して，$\mathrm{WKL}_0\vdash\sigma\Rightarrow \mathrm{PRA}\vdash\sigma$.

証明 θ を Σ^0_0 とし，$\sigma=\forall y\exists z\theta(y,z)$ を PRA で証明できない Π^0_2 文とする．すると，コンパクト性定理から，$\mathrm{PRA}\cup\{\neg\exists z\theta(c,z)\}\cup\{f(c,c,\cdots,c)<d：f$ は原始再帰的関数の記号$\}$が可算モデル (M,F,c,d) をもつ．ここで，上の補題により，$c\in I$ かつ $d\notin I$ となる半正則切断 $I\subseteq_e M$ が存在する．$\neg\exists z\theta(c,z)$ は Π^0_1 文で，$M\vDash\neg\exists z\theta(c,z)$ だから，$I\vDash\neg\exists z\theta(c,z)$ すなわち $I\vDash\neg\sigma$ である．他方，補題 3.27 から $(I,S_I)\vDash\mathrm{WKL}_0$ がいえる．よって，$(I,S_I)\vDash\mathrm{WKL}_0+\neg\sigma$ だから，$\mathrm{WKL}_0+\neg\sigma$ は無矛盾となり，σ は WKL_0 でも証明できない． □

付録　数学基礎論と消えたパラドックス

——ガリレオ，ゲーデル，フリードマン

1900年ヒルベルトは，20世紀の数学の発展を方向付けた23の問題を提起した．その筆頭である連続体仮説の問題をコーエンが解いたのは1963年のことである．集合論の研究者たちはよく冗談に“コーエン以前”をB. C. (Berore Cohen の意）といい，ゲーデル（Gödel）をB. C. の神（God）であるといったりするが，1960年代には数学基礎論の各分野でこのような大事件が起きており，まさに基礎論全体の変革期であった．

60年代革命の激しさは，その教科書の変化によく現われている．古き良き時代の教科書（例，Kleene, *Introduction to Metamathematics*, 1952）にはパラドックスから数学基礎論の誕生に至る歴史が悠然と述べられていたが，革命後のもの（例，Shoenfield, *Mathematical Logic*, 1967）ではパラドックスはせいぜい不完全性定理を導く一手段にすぎない．

このような状況を踏まえた上で，なぜここで敢えてカビ臭いパラドックスの話を持ち出すかというと，新歴も30年以上を経て，そろそろ新・旧基礎論を総括的に見直そうという気運が高まっているように思うからである．最近次々と基礎論の専門誌の編集方針が変わったのだが，そこにもそういう動きが読み取れる．ともあれ，この小論では，パラドックスをキーワードとして生きている数学基礎論を縦にサバくことを試み，読者諸賢のご批判を仰ぎたい．

部分と全体のパラドックス

「全体は部分より大きい」というのが，ユークリッドの８番目の公理だった．この主張は日常論理では当たり前でも，数学的に意味するところは曖昧で，そこにパラドックスの生まれる土壌があった．ガリレオ・ガリレイ（1638）は平方数全体が

自然数全体と1対1に対応していることに気が付いた．

$$\begin{array}{cccc} 1, & 2, & 3, & 4,\cdots \\ | & | & | & | \\ 1, & 4, & 9, & 16,\cdots \end{array}$$

（注：本質的なことではないが，この付録では0を自然数に含めない．）

平方数全体は自然数全体の一部に過ぎないので，これはユークリッドの公理に矛盾するというのがガリレオのパラドックスの主旨である．無限集合の扱いに慣れてしまった我々の感覚では，もはやこれがパラドックスであるという感覚を持ちえないが，これから述べるいろいろなパラドックスの原型になっていることは注意しておきたい．ちなみに，ガリレオのパラドックスはクリーネの教科書[1]の第1頁に載っているので，一昔前に基礎論をかじった人は誰でも知っていたと思うが，いまはこの話を知らない基礎論の専門家も多いと思う．また，デーデキント（1888）は，このパラドックスを無限の本質と考えて，全体が部分より大きいもの，つまり自分の一部分と1対1に対応できないものを“有限”と定義した．

数えられる無限と数えられない無限

自然数の集合 N の真部分集合で N 全体と1対1に対応できるものは，平方数に限らず，偶数全体とか素数全体とかいろいろ考えられる．しかし逆に N を真部分集合として含んで，それと全体が1対1に対応できるものはあるだろうか？　単純な例としては整数全体 Z が考えられる（問：これを証明しなさい）．そしてこの延長でカントルは有理数全体 Q が N と1対1対応になることを示した．以下，正の有理数の集合 Q^+ が N と1対1に対応することを示し，有理数全体 Q の場合の証明は読者にお任せしたい．正の有理数は（自然数 n）/（自然数 m）で表されるから，Q^+ は自然数の対 (n,m) の集合 N^2 の一部分に対応している．一方，集合 N^2 は次の関数 f によって N と1対1になる．

$$f(n,m)=\frac{(n+m-1)(n+m-2)}{2}+n.$$

したがって，Q^+ は N のある部分に対応するが，N の無限部分集合は上の平方数の場合同様 N 全体と１対１になるので，結局 Q^+ は N と１対１対応になる．（証明終わり）

さて，次の問題は実数全体 R と N の関係である．これに対し，カントルは“対角線論法”と呼ばれる強力な手法を開発し，R と N とは１対１に対応できないことを示した．要点は次のようになる．R と N との１対１対応が存在すると仮定する．このとき，R の部分集合 $[0,1)=\{x : 0 \leq x < 1\}$ も N と１対１に対応する（なぜか考えよ）．そこで $[0,1)$ の各実数 a_i，$i \in N$ を小数展開して，

$$a_1 = 0.a_{11}a_{12}a_{13}a_{14}, \cdots$$

$$a_2 = 0.a_{21}a_{22}a_{23}a_{24}, \cdots$$

$$a_3 = 0.a_{31}a_{32}a_{33}a_{34}, \cdots$$

$$\cdots\cdots$$

としよう．有限小数 $a_i = 0.a_{i1}a_{i2}\cdots a_{ik}$ に対しては $a_{ik+1} = a_{ik+2} = a_{ik+3} = \cdots = 0$ と定義しておく．さて，このリストに基づいて，

$$\begin{aligned} b_n &= a_{nn} + 1 \qquad (a_{nn} \leq 7 \text{ のとき}), \\ &= 1 \qquad\qquad (a_{nn} = 8 \text{ または } 9 \text{ のとき}) \end{aligned}$$

と定義し，次なる実数 b を考える．

$$b = 0.b_1 b_2 b_3 b_4 \cdots$$

すると，実数 b は $[0,1)$ の各実数 a_i と小数 i 桁目で必ず異なるから，上のリストには現われていない．しかし，b が０と１の間の実数であることは明らかなので，$[0,1)$ が N と１対１対応するという仮定が否定された．

集合の世界のパラドックス

対角線論法は，R が N より真に大きな集合であることを示しただけでなく，どの集合にもそれより大きな集合が存在することを示すことになった．つまり，集合

A とそのベキ集合 $P(A)=\{B:B\subseteq A\}$ は１対１に対応しないことが，対角論法で言える．（証明のアイデア：１対１対応があったとし，$B\subseteq A$ に対応する A の要素を a_B とする．このとき $C=\{a_B:a_B\notin B\}$ とおくと $a_C\in C$ か $a_C\notin C$ か？）

それでは，集合全体の集合を考えたらどうなるか？　これより大きな集合は定義からありえないので上の話と矛盾するというのがカントルのパラドックス（1899）である．（これ以前にも，カントル(1895)とブラリ・フォルチ(1897)は，順序数全体を考えることでパラドックスを発見しているが，ここでは省略する．）

さて，この状況をエレガントに表現したのがラッセルである．彼は $S=\{X:X\notin X\}$ という集合を考えた．つまり，S は，自分自身を要素として含まないような集合 X の集まりであり，普通の集合はみんな S に属するように見える．では，S 自身はどうだろうか？　S が S に属しているとすれば，S は $X\notin X$ の関係を満たすから，$S\notin S$ つまり S は S に属さない．逆に，$S\notin S$ でも，S は $X\notin X$ の関係を満たすから $S\in S$ となって矛盾する．これがいわゆるラッセルのパラドックス（1902）である．集合 S の定義にすでに対角論法の構造が入っていることに注目したい．

数の世界のパラドックス

カントルやラッセルが創った集合はとてつもなく大きなもので，今日の集合論では集合として扱わず，クラス（class）と呼んで区別している．こうすることで，集合論からパラドックスを排除したわけである．しかし，リシャール（1905）はもっと身近な世界からもパラドックスが生じることを示した．日本語で定義できるような実数は可算（N と１対１対応する）である．なぜなら，日本語で用いられる文字は有限種類しかなく，実数を定義する日本語の文を長さの短いものから順に並べていくことができるからである．そこで，すべての定義可能な実数を並べると，例の対角論法でこのリストにない，つまり定義不可能な実数が構成できる．しかし，この構成自身がその実数の定義になっているので矛盾するというわけである．この

パラドックスは，定義可能という言葉の一見合理的で実は曖昧な意味合いによっている．もしも特定の公理系における定義可能性を考えるなら，各実数は定義できても実数を並べる操作は体系外のものなので，対角論法で創られる実数は定義可能とはいえず矛盾は生じない．

そしていよいよ，パラドックスの波は自然数の世界にも押し寄せてくる．「日本語で20字で定義できない最小の自然数」は20字で定義できているというのが，ベリーのパラドックス（1906）である．リシャール同様，定義可能性の曖昧さを突いたものだが，表向き無限が登場しない単純さの中にむしろこのパラドックスの深遠さがある．これについてはもう一度あとで触れる．

ベリー以後も，グレリングのパラドックス（1908），床屋のパラドックス（1918）など論理的，あるいはパズル的なパラドックスが次々発見されているが，これらは数学の基礎とは直接関係がないので他書に譲りたい．また，選択公理に関連するパラドックス（バナッハ-タルスキ 1924 など）についても，スペースの関係で省略せざるをえない．『パラドックスの数理』（バンチ著，細井訳，共立出版，1984）などを参照されたい．

数学基礎論の誕生

次々発見されるパラドックスの嵐の中で，数学の基礎付け，特に集合論の公理化は着々と進んでいった．ツェルメロやフレンケルらが今日の公理的集合論（ZF 集合論）の土台を確立したのは1920年代前半である．スコーレムは，この種の公理化に重大な問題が潜んでいることに気付いた．ZF 集合論のように，可算個の公理からなる無矛盾な体系には，それを満たす可算個の要素からなる構造が存在するというものである．集合論の公理を満たす以上，その構造はすべての実数を含むはずだから，これは実数が可算でないことと矛盾するように見える．この事実はしばしばスコーレムのパラドックス（1922-3）と呼ばれているが，実はパラドックスというより集合の濃度の概念に新しい見解を与えた画期的な定理である．つまり，集合論

の可算モデルというのは，モデルを外から見ての話であり，モデルの中で自らが可算であるとわかっている（つまり，すべての集合を並べる関数がその世界に存在している）わけではない．

ところで，この定理が実質上ゲーデルの完全性定理を先取りした内容になっていることは見逃せない．また，1926年には，フィンスラーがリシャールのパラドックスから決定不能命題の存在を導いており，こちらはゲーデルの第一不完全性定理の先駆となる．こうして歴史はいよいよゲーデルの登場を迎える．

ゲーデルの完全性定理

ゲーデルの学位論文の主要結果である完全性定理（1930）にはいくつかの（本質的には同値な）表現があるが，次の２つが一般によく知られている．

（１） 論理的に矛盾を含まない述語論理の体系には，それを満たす数学的構造（モデル）が存在する．

（２） ある体系から述語論理の法則で演繹される定理の集合は，その体系のすべてのモデルで成り立つ命題の集合と一致する．

ある公理系である命題が成り立つということを示す際，数学でよくやる証明は，その公理を成り立たせる任意の構造を持ってきてそこでその命題が成り立つことを示すというものである．(２)の意味するところは，この証明法と同等になるほど述語論理の法則は十分強いということで，その意味で完全なのである．

ゲーデルの不完全性定理

今度は上と少し違う意味で“完全”という言葉を使うので注意されたい．体系 T の言葉で表現されているある命題 A もその否定 $\neg A$ も T で証明できないときに，A を T から独立な命題といい，そのような命題が存在する体系 T を“不完全”という．この意味では述語論理の公理だけの体系は明らかに不完全である．

さて，ゲーデルが1931年に発表した論文によれば，自然数論を含む無矛盾な公理

系はすべて不完全である（第一不完全性定理）．ここで，公理系というのは，有限的メカニズムで捉えられるような公理図式の集まりのことである．現実世界で真となる命題を全部集めてきてみんな公理にすれば完全な体系が得られるかも知れないが，それは議論の対象外である．それから，ゲーデルの原論文では無矛盾より少し強い ω-無矛盾が定理の前提となっていて，それを無矛盾に改良したのはロッサーの仕事（1936）である．

ゲーデルは，第一不完全性定理の証明をさらに深く分析することで，自然数論を含む無矛盾な体系 T においては，T の無矛盾性を表す命題 $\mathrm{Con}(T)$ が T から証明できないことを発見した（第二不完全性定理）．2つの不完全性定理はしばしば並べて書かれ，一見類似した主張のようにも思えるが，じつはかなり性質を異にするものである．第一定理の主張は一見パラドックスの話とは無縁に思えるが，この定理の証明は「自分自身は証明できない」という意味の命題を創って，対角論法でそれが証明できないことを示すので，カントル，ラッセル，リシャールの延長にあるといえる．それに対し，第二定理はしばしば「自分の正当性は自分自身で証明できない」というような比喩で語られるのでパラドクシカルな感じを受けるが，じつはパラドックスを“無矛盾性”という数学的な概念に置き代えているところが重要で，その証明もリシャールからの流れだけでは類推しえない巧妙なものである．“無矛盾性”を数学的な概念といったのは，完全性定理によりそれは数学的なモデルの存在を意味するものだからである．

ところで，ゲーデルは第二不完全性定理をきちんと証明したわけではない．証明を頭に描いていたことは確かだが，それを書き下すための細かいテクニックまで気付いていたかどうかは定かでない．これを実際にやってみせたのは，ヒルベルトとベルナイスであり，その後も多くの研究者が様々な改良や考察を加えて今日に至っている．ゲーデルはリシャールのパラドックスを手本に第一不完全性定理を証明し，それを第二不完全性定理に発展させたが，ブーロス（1989）はベリーのパラドックスから第一不完全性定理を導き，菊池誠君（1994）はそれをもとに第二不完全性を

証明している.

不完全性定理を越えて

ゲーデル以降の基礎論の流れは，不完全性定理をいかに乗り越えるかという主題で発展しているように思う．まず，第二不完全性定理に真っ向から挑戦したのがヒルベルトの助手ゲンツェンである．彼は，ペアノ算術（自然数論）では証明できないが有限の立場で認めうる論法（超限帰納法）を用いてペアノ算術の無矛盾性を証明した（1936)．また，タルスキらは実閉体や代数的閉体など完全な理論がいろいろあることを発見している（1949).

ペアノ算術において，いわゆる自己言及文ではなく，数学的に意味を持つ独立命題が存在するか否かは，ゲーデル以来長らく基礎論の研究者の関心の的であったが，1977年にパリスとハーリントンがラムゼイの定理の一変種がそれになることを示した．ラムゼイの定理というのは，いまや組合せ論の定理として有名だが，そもそもラムゼイはラッセルの下でパラドックスの分類などをやっていた論理学者であり，彼の定理がここに登場するのも因縁めいた話である.

パリス＝ハーリントン以降，算術に限らず集合論までこの種の独立命題が次々に発見されている．これらの発見は，ある命題を証明するのに必要最低限の公理は何かという一般的な問いを生み，“逆数学”という研究プロジェクトに発展している.

H. フリードマンの定理

さて，ここでガリレオのパラドックスの話に戻ろう．自然数の集合 N から平方数の集合の上へ1対1関数 $f(x)=x^2$ があった．この関数 f は大小関係を保存している（$x<y$ ならば $f(x)<f(y)$）が，足し算や掛け算などの演算は保存していない．例えば，$f(2)+f(3)$ は $f(2+3)$ ではなく平方数にもならない．したがって，代数的構造まで考えると，平方数の集合は N の一部とはいえないのである．実際，$(N;+,\cdot,<)$ は自分と同型な部分構造を持たないことが簡単に証明できる．そうする

と，代数構造まで含めてユークリッドの反例になるものはあまりなさそうな気がしてくるのだが，その感覚をひっくり返したのがフリードマンである（1973）.

言葉の説明を後回しにして，定理を述べる.

ペアノの算術の可算な超準モデルは，自らと同型な接頭部を持つ.

和積演算を伴った非負整数の集合をペアノの算術の“標準モデル”といい，それと同型でない数学的構造でペアノの公理を満たすものを“超準モデル”という．標準モデルはたった1つしかないが，超準モデルは可算のものに限っても非可算無限個存在する．超準モデルもペアノの公理を満たしているから，その上に大小関係や和積演算が定義されている．モデルの要素を大きさの順に並べて，あるところで大きい方と小さい方に分け，小さい方を“接頭部”と呼ぶ．どんな超準モデルも，標準モデルと同型な接頭部を持つことが簡単に示せる．フリードマンの定理は，どんな超準モデルも自分の縮小コピーを接頭部として持つというものである．これは，自分と同じものは自分の中で造れないという第二不完全性（＋完全性定理）と矛盾するようだが，そうではない．なぜなら，接頭部の切り口が自分では見つけられない（定義できない）からである.

この定理の証明がまた実に巧妙で面白い．厳密な議論を紹介するスペースはないが，以下に述べるアイデアからその卓抜さに共感いただければ幸いである．任意の超準モデルを $\boldsymbol{M}$ とする．$\boldsymbol{M}$ のなかのある超準数を固定して，それ以下のゲーデル数をもつ論理式に関して，$\boldsymbol{M}$ の真偽を反映させたモデルを $\boldsymbol{M}$ の中に構成する．ある超準数以下というのはモデルのなかでは有限を意味するのでこの構成が可能なのだが，外から見ればすべての論理式は超準数以下のゲーデル数を持つので，結局論理的に同等なモデルが造れたことになる．そしてこのモデルをシェイプ・アップして同型にするという論法である．フリードマンのもとの証明はこれと少し異なるが，詳しくは Kaye 著, *Models of Peano Arithmetic* (Oxford, 1991) などを参照されたい.

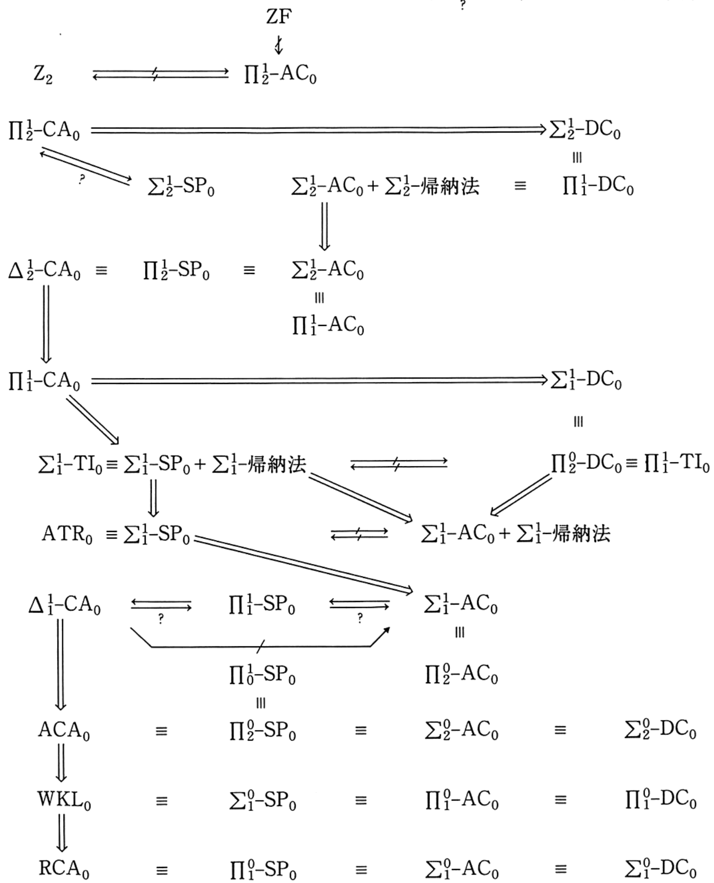
おまけ

H.フリードマンは1967年に18歳でスタンフォード大に入った．しかし，並の秀才と少し違うのは，このとき助教授として入ったことである．彼はすでに2階算術について画期的な仕事をしてMITから博士号をとっていた．一方，ガリレオは19歳で初めてユークリッドの原論に触れたというし，ガリレオのパラドックスも70歳過ぎの話である．

（この付録は『数学セミナー』1993年8月号に掲載された記事を部分的に修正したものである.）

2 階算術の諸体系チャート

（チャートの見方：
$S \rightarrow T$ は，$S \vdash T$ のこと
$S \Rightarrow T$ は，$S \rightleftarrows T$（逆は不成立）のこと
$S \equiv T$ は，$S \rightleftarrows T$ のこと
$S \underset{?}{\rightarrow} T$ は，$S \rightarrow T$ か否か不詳）



あとがき（参考文献）

まず，本書を書く際，というより私の座右にあって年中利用しているのは，次の愛読書である．

[1] J. R. Shoenfield, *Mathematical Logic*, Addison-Wesley 1967.

[2] H. Rogers, *Theory of Recursive Functions and Effective Computability*, McGraw-Hill 1967.

[3] J. Barwise (ed.), *Handbook of Mathematical Logic*, North-Holland 1977.

[4] J. Y. Girard, *Proof Theory and Logical Complexity*, vol. 1, Bibliopolis 1987.

[5] P. Odifreddi, *Classical Recursion Theory*, North-Holland 1989.

[6] R. Kaye, *Models of Peano Arithmetic*, Oxford University Press 1991.

[7] P. Hájek and P. Pudlák, *Metamathematics of First-Order Arithmetic*, Springer 1993.

逆数学や2階算術そのものに関する書物はまだ存在しない（本書が世界で初めて！）．近い将来，

[?] S. Simpson, *Subsystems of Second-Order Arithmetic*, Springer（近刊）.

が出版されるはずだが，この本が予告され，原稿の一部のコピーが出回ってからもう10年以上になるので，あと何年待てば世に出るのか私は知らない．しかし，シンプソン氏が出版をする意志を捨てていないことは，私との個人的な連絡において確認されている．

本書の姉妹編といえるのが，

[8] 田中一之編著『数学基礎論講義』日本評論社，1997

である．不完全性定理の詳しい証明や周辺の最近の話題を扱った希有な本である．

逆数学の研究の背景や位置づけを知るためにも必要な１冊である．

さて，前書きにも書いたように，本書を読み終えたら，最新の研究論文も読めるはずである．ここに，その膨大な文献リストを示すことはできないので，興味ある方は次の解説文とそこでの参考文献をご覧いただきたい．

［９］田中一之「'逆・数学' と２階算術の証明論」，学会誌『数学』第42巻３号 (1990)，244-260.

［10］田中一之「逆数学と最近の数学基礎論」，学会誌『情報処理』第35巻４号 (1994)，329-340.

もっと新しい論文については，次のロジック専門雑誌を何冊か眺めれば，きっと面白いものが見つけられるだろう．

Journal of Symbolic Logic, Association for Symbolic Logic.

Annals of Pure and Applied Logic, North-Holland.

Archive for Mathematical Logic, Springer.

Mathematical Logic Quarterly, Johann Ambrosius Barth.

もちろん他の数学誌に載ることもあるので，人名でもチェックしておきたい．主な研究者の名前をリスト・アップしておくと，

H. M. Friedman,　S. G. Simpson,　D. K. Brown,　J. L. Hirst,

X. Yu,　F. Ferreira,　T. A. Slaman,　K. Tanaka,　…

＋　数年後の貴方(？).

索　引

A-Z　行

著者略歴

田中一之（たなか　かずゆき）　Ph. D.

1955年　東京都に生まれる
1978年　東京工業大学理学部情報科学科卒業
1986年　カリフォルニア大学バークレイ校より
　　　　博士号　Ph. D.（数学）を取得
　　　　東工大助手，東北大助教授を経て
現　在　東北大学教授（大学院理学研究科数学専攻）
著　書　『計算理論と論理プログラミング』丸善（共訳）
　　　　『数学基礎論講義』日本評論社（編著）

逆数学と2階算術

1997年 8 月10日　第 1 刷発行

著者　田中一之 ©

発行　河合文化教育研究所
〒464 名古屋市千種区今池2-1-10
TEL (052) 735-1706

発売　㈱河合出版
〒151 東京都渋谷区千駄ヶ谷5-1-6
TEL (03) 3354-1481
〒464 名古屋市千種区今池2-1-10
TEL (052) 735-1575

印刷 製本　㈱あるむ

ISBN 4-87999-970-9

数学の古典探訪シリーズ

河合ブックレット
数学シリーズ

1 古典へのプレリュード　倉田令二朗著　定価 800 円

I 複素数　II 3次, 4次方程式　III 初等整数論入門　IV 有限群論入門

2 古典へのインターリュード　倉田令二朗著　定価 800 円

V 多項式　VI 多項式の根　VII 環と体　VIII 対称式と対称量　IX 代数体

3 ガウス2次形式論(1)　倉田令二朗著　定価 1300 円

I 基本概念と基本問題　II 判別式が負の場合　III 判別式が正の非平方根の場合　IV 判別式が平方根の場合，その他．Disquisitiones Arithmeticae 153～222条の詳細な紹介と解説

4 ガロア方程式論(1)　倉田令二朗著　定価 800 円

I ルフィニ, ヴァンツェル, アーベルの不可能証明　II ガロア分解式, 分解体　III ガロア群　IV ガロアの理論　V 素数次既約方程式(ガロア第1論文の詳細な展開)

5 ガウス初等整数論　倉田令二朗著　定価 1300 円

Disquisitiones Arithmeticae I～IV (合同式から平方剰余の相互法則まで)の多面的な検討

6 ガウス円分方程式論　倉田令二朗著　定価 800 円

Disquisitiones Arithmeticae 338～366条の詳細な紹介と解説．付・巡回方程式

7 ガウス2次形式論(2)　倉田令二朗著　定価 1300 円

2次形式の合成， 3元2次形式論

10 微分方程式の話　斎藤利弥著　定価 1300 円

微分方程式論の基本定理を通して，微積分学の美しさとパワーについて語る

11 複素関数論入門　斎藤利弥著　定価 1360 円

12 ゲーデルの夢　竹内外史著　定価 1360 円

表示価格は本体のみの価格です．

「数学基礎論シリーズ」既刊及び近刊予定

ゲーデルの不完全性定理，コーヘン革命など20世紀数学基礎論の大展開に学びつつ，数学基礎論の意味と展望，そしてその全貌を初めて重層的構造的に明かした画期的なシリーズ．現代日本の基礎論研究の第一人者を網羅して鋭意刊行する，我が国初，そして世界でも初めての数学基礎論の本格的入門兼先端部門の解説書．

◉既刊

第0巻 『数学基礎論へのいざない』 倉田令二朗著 1650円

第1巻 『入門数学基礎論』 倉田令二朗著 1845円

第2巻 『公理論的集合論』 倉田令二朗・篠田寿一著 1553円

第3巻 『モデルの理論』 坪井明人著 1700円

第4巻 『逆数学と2階算術』 田中一之著 1400円

第5巻 『帰納的関数と述語』 篠田寿一著 2000円

◉近刊予定

第6巻 『超準的方法によるファインマン積分の理論』 中村 徹著

別 巻 『入門への補遺』 倉田令二朗・篠田寿一著

表示価格は本体のみの価格です．